

Jean Goubault-Larrecq

λ -calcul

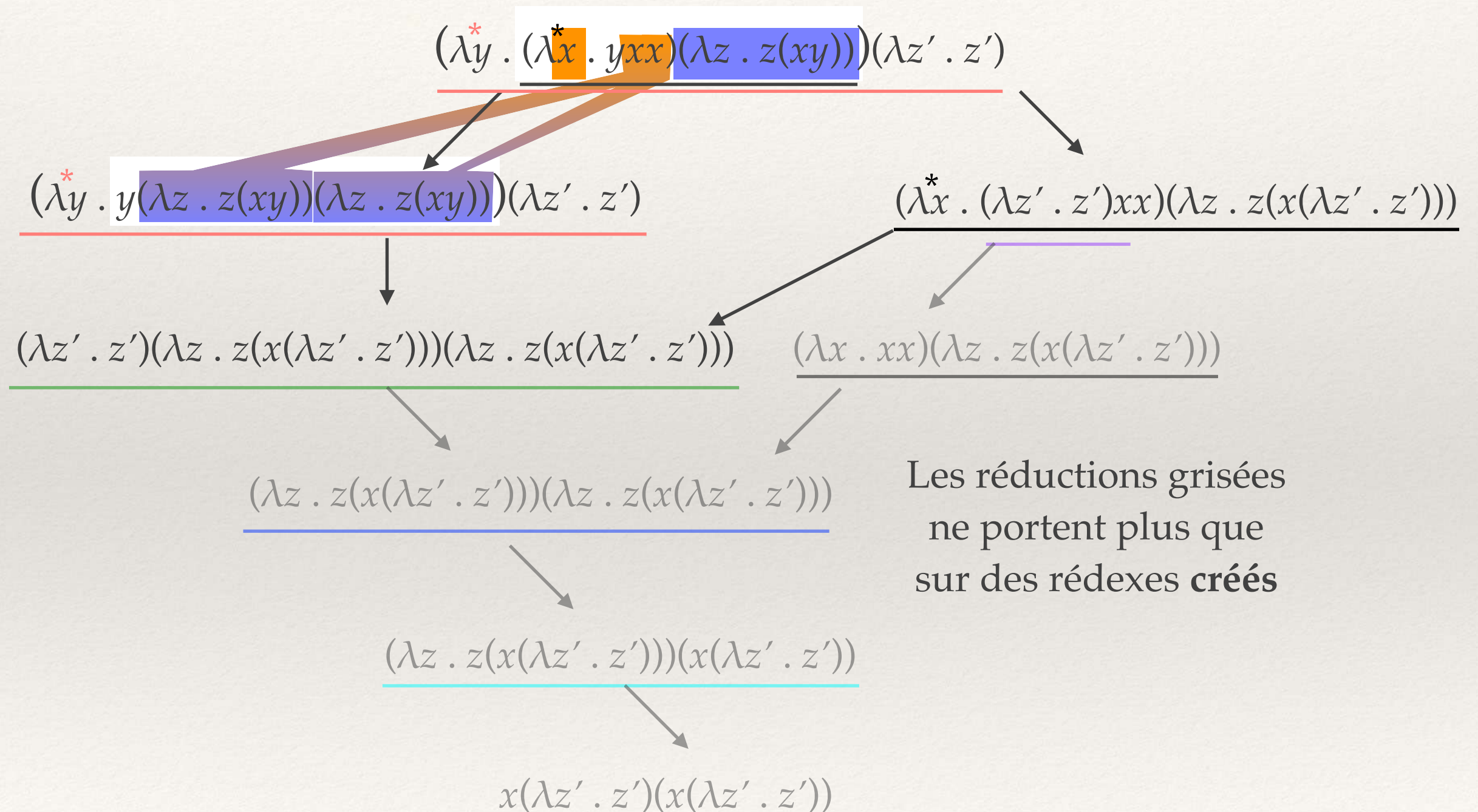
2. Développements finis,
confluence

Le théorème des développements finis

Rédexes créés

- ❖ Lors d'une contraction $(\lambda x . u)v \rightarrow u[x:=v]$, si:
 - $u = C[xt]$
 - $v = \lambda y . s$alors $u[x:=v]$ contient un sous-terme $(\lambda y . s)(t[x:=v])$: c'est un **rédex créé**
- ❖ Théorème des développements finis: « si on ne contracte pas les **rédexes créés**, alors la réduction termine »
- ❖ Ex: $\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \delta\delta$, où $\delta \stackrel{\text{def}}{=} \lambda x . xx$
 $\Omega = (\lambda x . xx) (\lambda y . yy) \rightarrow (\lambda y . yy) (\lambda y . yy)$: **rédex créé**: stop

Exemple de développements finis



Formalisation: le λ^* -calcul

❖ La syntaxe du λ^* -calcul:

$s, t, u, v, \dots ::=$

$x, y, z, \dots$ variables (en nb. ∞ dénombrable)

| st application (de s à t)

| $\lambda x . s$ λ -abstraction (`fun  $x \rightarrow s$` , en Caml)

| $(\lambda^* x . s)t$ rédex

Ce sera la **seule forme** de rédex du λ^* -calcul
— non, $(\lambda x . s)t$ n'y est pas un rédex

tout ça à
 α -renommage
près, bien
entendu

$(\lambda^* x . s)t$ n'est **pas** une application;
pensez-y comme `let  $x=t$  in  $s$`

L'étoile parcourt un ensemble;
si j'ai besoin d'en prendre plusieurs, je les
représenterai avec des couleurs différentes

Formalisation: le λ^* -calcul

- ❖ La syntaxe du λ^* -calcul:

$s, t, u, v, \dots ::=$

$x, y, z, \dots$	variables (en nb. ∞ dénombrable)
$ st$	application (de s à t)
$ \lambda x . s$	λ -abstraction (<code>fun $x \rightarrow s$</code> , en Caml)
$ (\lambda^* x . s)t$	rédex

- ❖ Unique règle: $(\beta^*) \quad (\lambda^* x . u) v \rightarrow u[x:=v]$
- ❖ Nous allons montrer que $\rightarrow_{\beta^*}$ termine (fortement)

Terminaison: 1er essai

- ❖ Technique de base: montrer que tout λ^* -terme u termine, par récurrence sur (la taille de) u
- ❖ Cas de base: les variables terminent (normales)
- ❖ Cas $\lambda x . u$: les seules réductions ∞ partant de $\lambda x . u$ sont de la forme
$$\lambda x . u_0 \rightarrow \lambda x . u_1 \rightarrow \dots \rightarrow \lambda x . u_n \rightarrow \dots (\infty)$$
où $u = u_0 \rightarrow u_1 \rightarrow \dots \rightarrow u_n \rightarrow \dots (\infty)$
- ❖ impossible car u termine, par hyp. réc.

noter que, même si u_n est de la forme $\lambda x . s$,
 $u_n v_n$ n'est **pas** un rédex en λ^* -calcul

non, u_n ne **peut pas** être de la forme $\lambda^* x . s$:
 $\lambda^* x . s$ ne fait pas partie de la syntaxe du λ^* -calcul
(rappel: $(\lambda^* x . s)t$ n'est **pas** une application,
c'est un let)

- ❖ Cas uv : les seules réductions ∞ partant de uv sont de la forme
$$u_0 v_0 \rightarrow u_1 v_1 \rightarrow \dots \rightarrow u_n v_n \rightarrow \dots (\infty)$$
- ❖ où $u=u_0$, $v=v_0$, et où pour tout i , $[u_i v_i \rightarrow u_{i+1} v_{i+1} \text{ donc}]$
 - soit $u_i \rightarrow u_{i+1}$ et $v_i = v_{i+1}$ (type « gauche »)
 - soit $u_i = u_{i+1}$ et $v_i \rightarrow v_{i+1}$ (type « droit »)
- ❖ Par hyp.réc., u termine donc # fini de types « gauche »
- ❖ De même, v termine donc # fini de types « droit »
- ❖ Donc la réduction donnée partant de uv ne peut pas être ∞

Terminaison: 1er essai

- ❖ Cas $(\lambda^*x . u)v$: les seules réductions ∞ partant de $(\lambda^*x . u)v$ sont de la forme
(1) $(\lambda^*x . u_0)v_0 \rightarrow (\lambda^*x . u_1)v_1 \rightarrow \dots \rightarrow (\lambda^*x . u_n)v_n \rightarrow \dots (\infty)$
ou (2) $(\lambda^*x . u_0)v_0 \rightarrow (\lambda^*x . u_1)v_1 \rightarrow \dots \rightarrow (\lambda^*x . u_n)v_n \rightarrow u_n[x:=v_n] \rightarrow \dots (\infty)$

où $u=u_0$, $v=v_0$, et où pour tout i ($i < n$ dans le 2nd cas),

— soit $u_i \rightarrow u_{i+1}$ et $v_i = v_{i+1}$ (type « gauche »)

— soit $u_i = u_{i+1}$ et $v_i \rightarrow v_{i+1}$ (type « droit »)

- ❖ Par hyp.réc., # fini de types « gauche », idem types « droit », donc (1) impossible

Le truc: **quantifier sur les substitutions** (parallèles)

- ❖ Comment conclure dans le cas (2)?
- ❖ On pourrait montrer que si u termine et v termine, alors $u[x:=v]$ termine, mais pour ça il faudra aussi montrer que $u[x:=v][y:=w]$ termine, etc.

Substitution parallèle

- ❖ Une **substitution** θ est une fonction d'un domaine fini de variables vers les termes

$$\theta \stackrel{\text{def}}{=} [x_1 := v_1, \dots, x_m := v_m] \quad (x_i \text{ distinctes 2 à 2})$$

$$\text{dom } \theta \stackrel{\text{def}}{=} \{x_1, \dots, x_m\} \quad \text{yld } \theta \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^m \text{fv}(v_i)$$

- ❖ On définit $u\theta$ lorsque $\text{bv}(u) \cap (\text{dom } \theta \cup \text{yld } \theta) = \emptyset$

- ❖ $x\theta \stackrel{\text{def}}{=} v_i$ si $x = x_i$, x si $x \notin \text{dom } \theta$

$$(st)\theta \stackrel{\text{def}}{=} (s\theta)(t\theta)$$

$$(\lambda x . s)\theta \stackrel{\text{def}}{=} \lambda x . s\theta$$

$$((\lambda^* x . s)t)\theta \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda^* x . (s\theta))(t\theta)$$

généralise la notion de
substitution de la dernière fois
(cas $m=1$)

Substitution parallèle

- ❖ **Lemme.** Si $\theta \stackrel{\text{def}}{=} [x_1:=v_1, \dots, x_m:=v_m]$, et $z \notin \text{dom } \theta \cup \text{yld } \theta$, alors $(u\theta)[z:=t] = u[x_1:=v_1, \dots, x_m:=v_m, z:=t]$
- ❖ Preuve: récurrence sur (la taille de) u .
Le seul cas intéressant est si u est une variable:
- ❖ si $u = x_i$, $(u\theta)[z:=t] = v_i[z:=t] = v_i$ car $z \notin \text{yld } \theta$
$$= u[x_1:=v_1, \dots, x_m:=v_m, z:=v]$$
- ❖ si $u = z$, $(u\theta)[z:=t] = z[z:=t]$ car $z \notin \text{dom } \theta$
$$= t = u[x_1:=v_1, \dots, x_m:=v_m, z:=t]$$
- ❖ (autres variables: trivial)

La proposition clé

- ❖ Soit $SN \stackrel{\text{def}}{=} \{\text{termes qui terminent (fortement)}\}$
- ❖ Soit $\underline{SN} \stackrel{\text{def}}{=} \{\text{substitutions } \theta \stackrel{\text{def}}{=} [x_1:=v_1, \dots, x_m:=v_m] \text{ telles que tous les } v_i \text{ sont dans } SN\}$
- ❖ **Proposition.** Pour tout λ^* -terme u ,
pour toute $\theta \in \underline{SN}$, $u\theta \in SN$.
- ❖ Preuve: (presque) comme avant:
récurrence sur la taille de u .
- ❖ **Attention:** ce qu'on prouve par récurrence, c'est « pour toute $\theta \in \underline{SN}$, $u\theta \in SN$ » avec le quantificateur sur θ .

Cas 1/4: variables

Proposition. Pour tout λ^* -terme u ,
pour toute $\theta \in \underline{\text{SN}}$, $u\theta \in \text{SN}$.

- ❖ Si u est une variable,
pour toute $\theta \stackrel{\text{def}}{=} [x_1:=v_1, \dots, x_m:=v_m] \in \underline{\text{SN}}$,
- ❖ si $u \in \text{dom } \theta$, disons $u=x_i$, $u\theta=v_i$ est dans SN,
puisque $\theta \in \underline{\text{SN}}$
- ❖ sinon, $u\theta=x$ est en forme normale, donc dans SN

Cas 2/4: λ -abstraction

Proposition. Pour tout λ^* -terme u ,
pour toute $\theta \in \underline{\text{SN}}$, $u\theta \in \text{SN}$.

- ❖ Si u est
une λ -abstraction $\lambda x . s$,
pour toute $\theta \stackrel{\text{def}}{=} [x_1 := v_1, \dots, x_m := v_m] \in \underline{\text{SN}}$,
- ❖ $(\lambda x . s)\theta =_\alpha \lambda z . s[x := z]\theta$ (z fraîche, i.e., $\notin \text{dom } \theta \cup \text{yld } \theta$)
- ❖ les seules réductions ∞ partant de $\lambda x . u$ sont de la forme
$$\lambda z . u_0 \rightarrow \lambda z . u_1 \rightarrow \dots \rightarrow \lambda z . u_n \rightarrow \dots (\infty)$$
où $s[x := z]\theta = u_0 \rightarrow u_1 \rightarrow \dots \rightarrow u_n \rightarrow \dots (\infty)$
impossible car $s[x := z]\theta$ termine, par hyp. réc.

Note: taille de $s[x := z] = \text{taille de } s$
 $< \text{taille de } u = \lambda x . s$

Cas 3/4: application

Proposition. Pour tout λ^* -terme u ,
pour toute $\theta \in \underline{\text{SN}}$, $u\theta \in \text{SN}$.

- ❖ Si u est une application st ,
pour toute $\theta \stackrel{\text{def}}{=} [x_1:=v_1, \dots, x_m:=v_m] \in \underline{\text{SN}}$,
- ❖ $u\theta = (s\theta)(t\theta)$
- ❖ les seules réductions ∞ partant de $u\theta$ sont de la forme
$$u_0 v_0 \rightarrow u_1 v_1 \rightarrow \dots \rightarrow u_n v_n \rightarrow \dots (\infty)$$
où $s\theta = u_0$, $t\theta = v_0$, et où pour tout i , $[u_i v_i \rightarrow u_{i+1} v_{i+1} \text{ donc}]$
 - soit $u_i \rightarrow u_{i+1}$ et $v_i = v_{i+1}$ (type « gauche »)
 - soit $u_i = u_{i+1}$ et $v_i \rightarrow v_{i+1}$ (type « droit »)
- ❖ Par hyp.réc., $s\theta$ termine donc # fini de types « gauche »
- ❖ De même, $t\theta$ termine donc # fini de types « droit »
- ❖ Donc la réduction donnée partant de $u\theta$ ne peut pas être ∞

Cas 4/4: let (1ère partie/2)

Proposition. Pour tout λ^* -terme u ,
pour toute $\theta \in \underline{\text{SN}}$, $u\theta \in \text{SN}$.

- ❖ Si u est un let $(\lambda^*x . s)t$,
pour toute $\theta \stackrel{\text{def}}{=} [x_1:=v_1, \dots, x_m:=v_m] \in \underline{\text{SN}}$,
- ❖ $u\theta =_\alpha (\lambda^*z . s[x:=z]\theta)(t\theta)$ (z fraîche, i.e., $\notin \text{dom } \theta \cup \text{yld } \theta$)
- ❖ les seules réductions ∞ partant de $u\theta$ sont de la forme
(1) $(\lambda^*z . u_0)v_0 \rightarrow (\lambda^*z . u_1)v_1 \rightarrow \dots \rightarrow (\lambda^*z . u_n)v_n \rightarrow \dots (\infty)$
ou (2) $(\lambda^*z . u_0)v_0 \rightarrow (\lambda^*z . u_1)v_1 \rightarrow \dots \rightarrow (\lambda^*z . u_n)v_n \rightarrow u_n[z:=v_n] \rightarrow \dots (\infty)$
où $s[x:=z]\theta = u_0$, $t\theta = v_0$, et où pour tout i ($i < n$ dans le 2nd cas),
 - soit $u_i \rightarrow u_{i+1}$ et $v_i = v_{i+1}$ (type « gauche »)
 - soit $u_i = u_{i+1}$ et $v_i \rightarrow v_{i+1}$ (type « droit »)
- ❖ Par hyp.réc., # fini de types « gauche » et « droit », donc (1) impossible

Cas 4/4: let (2ème partie/2)

Proposition. Pour tout λ^* -terme u ,
pour toute $\theta \in \underline{\text{SN}}$, $u\theta \in \text{SN}$.

- ❖ Si u est un let $(\lambda^*x . s)t$,
pour toute $\theta \stackrel{\text{def}}{=} [x_1:=v_1, \dots, x_m:=v_m] \in \underline{\text{SN}}$,
- ❖ les seules réductions ∞ partant de $u\theta$ sont de la forme
(2) $(\lambda^*z . u_0)v_0 \rightarrow (\lambda^*z . u_1)v_1 \rightarrow \dots \rightarrow (\lambda^*z . u_n)v_n \rightarrow u_n[z:=v_n] \rightarrow \dots (\infty)$
où $s[x:=z]\theta = u_0$, $t\theta = v_0$, et où pour tout i ($i < n$ dans le 2nd cas),
 - soit $u_i \rightarrow u_{i+1}$ et $v_i = v_{i+1}$ (type « gauche »)
 - soit $u_i = u_{i+1}$ et $v_i \rightarrow v_{i+1}$ (type « droit »)
- ❖ On a $s[x:=z]\theta = u_0 \rightarrow^* u_n$ et $t\theta = v_0 \rightarrow^* v_n$
donc $s[x:=z]\theta[z:=t\theta] \rightarrow^* u_n[z:=v_n] \rightarrow \dots (\infty)$
- ❖ Mais $s[x:=z]\theta[z:=t\theta]$
 $= s[x:=z] [x_1:=v_1, \dots, x_m:=v_m, z:=t\theta]$

Lemme. Si $\theta \stackrel{\text{def}}{=} [x_1:=v_1, \dots, x_m:=v_m]$,
et $z \notin \text{dom } \theta \cup \text{yld } \theta$,
alors $(u\theta)[z:=t] = u[x_1:=v_1, \dots, x_m:=v_m, z:=t]$

Cas 4/4: let (2ème partie/2)

Proposition. Pour tout λ^* -terme u ,
pour toute $\theta \in \underline{\text{SN}}$, $u\theta \in \text{SN}$.

- ❖ Si u est un let $(\lambda^*x . s)t$,
pour toute $\theta \stackrel{\text{def}}{=} [x_1:=v_1, \dots, x_m:=v_m] \in \underline{\text{SN}}$,

$v_1, \dots, v_m$ dans SN, car $\theta \in \underline{\text{SN}}$ les termes de $u\theta$ sont de la forme

$$(2) (\lambda^*z . u_0)v_0 \quad (\lambda^*z . u_1)v_1 \rightarrow \dots \rightarrow (\lambda^*z . u_n)v_n \rightarrow u_n[z:=v_n] \rightarrow \dots (\infty)$$

où $s[x:=z]\theta = u_0$, $t\theta = v_0$, et où pour tout i ($i < n$ dans le 2nd cas),

— soit $u_i \rightarrow u_{i+1}$ et $v_i = v_{i+1}$ (type « gauche »)

— soit $u_i = u_{i+1}$ et $v_i \rightarrow v_{i+1}$ (type « droit »)

- ❖ On a $s[x:=z]\theta = u_0 \rightarrow^* u_n$ et $t\theta = v_0 \rightarrow^* v_n$
donc $s[x:=z]\theta[z:=t\theta] \rightarrow^* u_n[z:=v_n] \rightarrow \dots (\infty)$

- ❖ Mais $s[x:=z]\theta[z:=t\theta]$
 $= s[x:=z] [x_1:=v_1, \dots, x_m:=v_m, z:=t\theta]$

$t\theta$ dans SN, par hyp. réc. sur t

Lemme. Si $\theta \stackrel{\text{def}}{=} [x_1:=v_1, \dots, x_m:=v_m, z:=t\theta]$

cette substitution est donc dans $\underline{\text{SN}}$

alors $(u\theta)[z:=t] = u[x_1:=v_1, \dots, x_m:=v_m, z:=t]$

... est dans SN, par hyp. réc. sur $s[x:=z]$ (note: taille=taille de s < taille de u)

Cas 4/4: let (2ème partie/2)

Proposition. Pour tout λ^* -terme u ,
pour toute $\theta \in \underline{\text{SN}}$, $u\theta \in \text{SN}$.

- ❖ Si u est un let $(\lambda^*x . s)t$,
pour toute $\theta \stackrel{\text{def}}{=} [x_1:=v_1, \dots, x_m:=v_m] \in \underline{\text{SN}}$,
- ❖ les seules réductions ∞ partant de $u\theta$ sont de la forme

$$(2) (\lambda^*z . u_0)v_0 \rightarrow (\lambda^*z . u_1) v_1 \rightarrow \dots \rightarrow (\lambda^*z . u_n) v_n \rightarrow u_n[z:=v_n] \rightarrow \dots (\infty)$$
 où $s[x:=z]\theta = u_0$, $t\theta = v_0$, et où pour tout i ($i < n$ dans le 2nd cas),
 — soit $u_i \rightarrow u_{i+1}$ et $v_i = v_{i+1}$ (type « gauche »)
 — soit $u_i = u_{i+1}$ et $v_i \rightarrow v_{i+1}$ (type « droit »)
- ❖ On a $s[x:=z]\theta = u_0 \rightarrow^* u_n$ et $t\theta = v_0 \rightarrow^* v_n$
 donc $s[x:=z]\theta[z:=t\theta] \rightarrow^* u_n[z:=v_n] \rightarrow \dots (\infty)$
- ❖ Mais $s[x:=z]\theta[z:=t\theta]$
 $= s[x:=z] [x_1:=v_1, \dots, x_m:=v_m, z:=t\theta]$

Contradiction! Si $\theta \stackrel{\text{def}}{=} [x_1:=v_1, \dots, x_m:=v_m]$,
et $z \notin \text{dom } \theta \cup \text{yld } \theta$,
alors $(u\theta)[z:=t] = u[x_1:=v_1, \dots, x_m:=v_m, z:=t]$

... est dans SN, par hyp. réc. sur $s[x:=z]$ (note: taille=taille de s < taille de u)

Le théorème des développements finis

- ❖ On vient de prouver:
- ❖ **Proposition.** Pour tout λ^* -terme u ,
pour toute $\theta \in \underline{SN}$, $u\theta \in SN$.
- ❖ Donc, en prenant $\theta \stackrel{\text{def}}{=} []$:
- ❖ **Théorème (développements finis).**
Le λ^* -calcul est fortement normalisant.

Confluence du λ^* -calcul

Confluence locale du λ^* -calcul

- ❖ Nous notons que le λ^* -calcul est **localement confluent**
- ❖ Le raisonnement est exactement le même que pour le λ -calcul (avec des étoiles en plus, c'est tout)

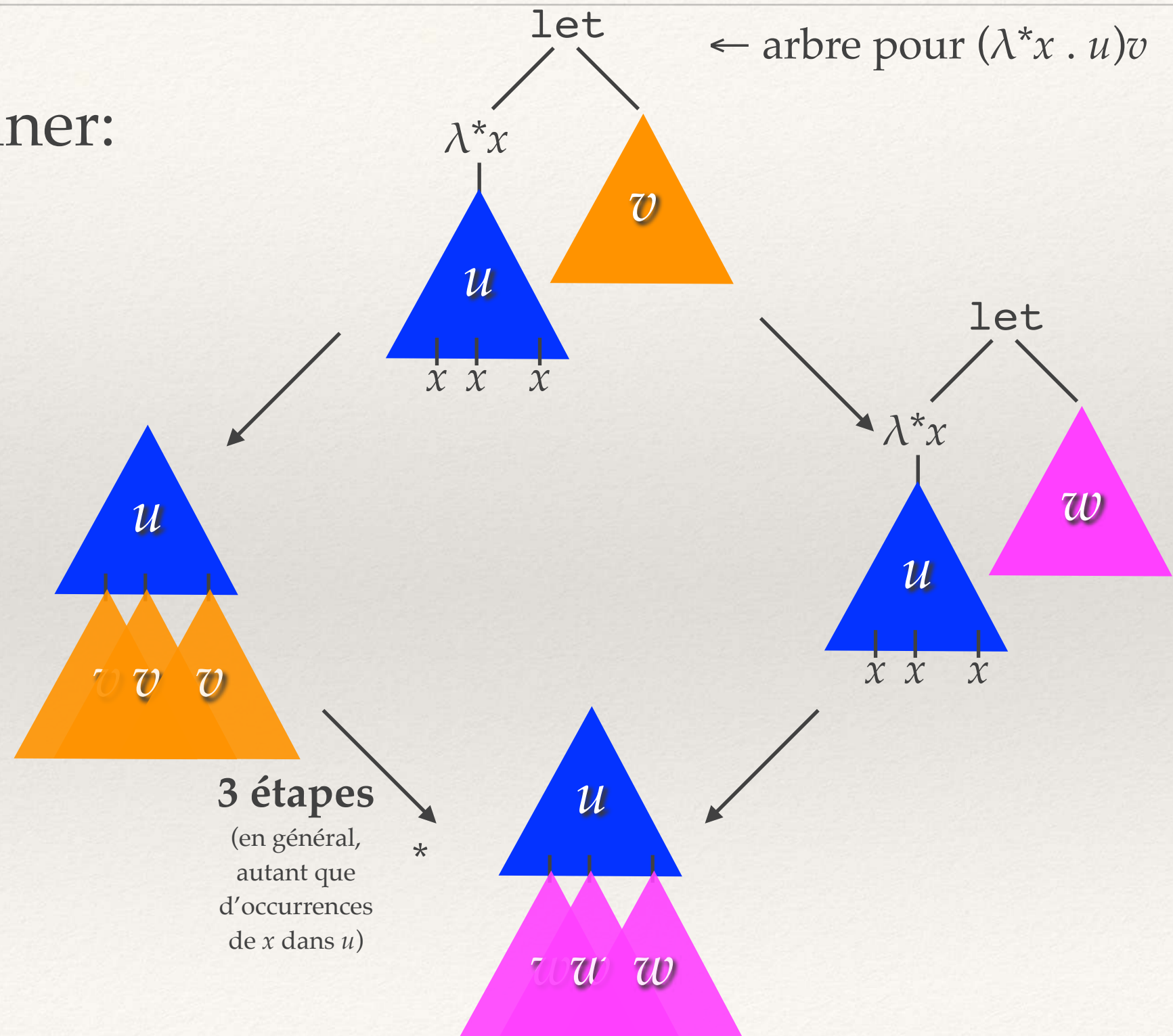
Le λ^* -calcul est localement confluant

❖ 3 cas à examiner:

❖ **Cas 1:**

$v \rightarrow w$,

v argument
d'un rédex



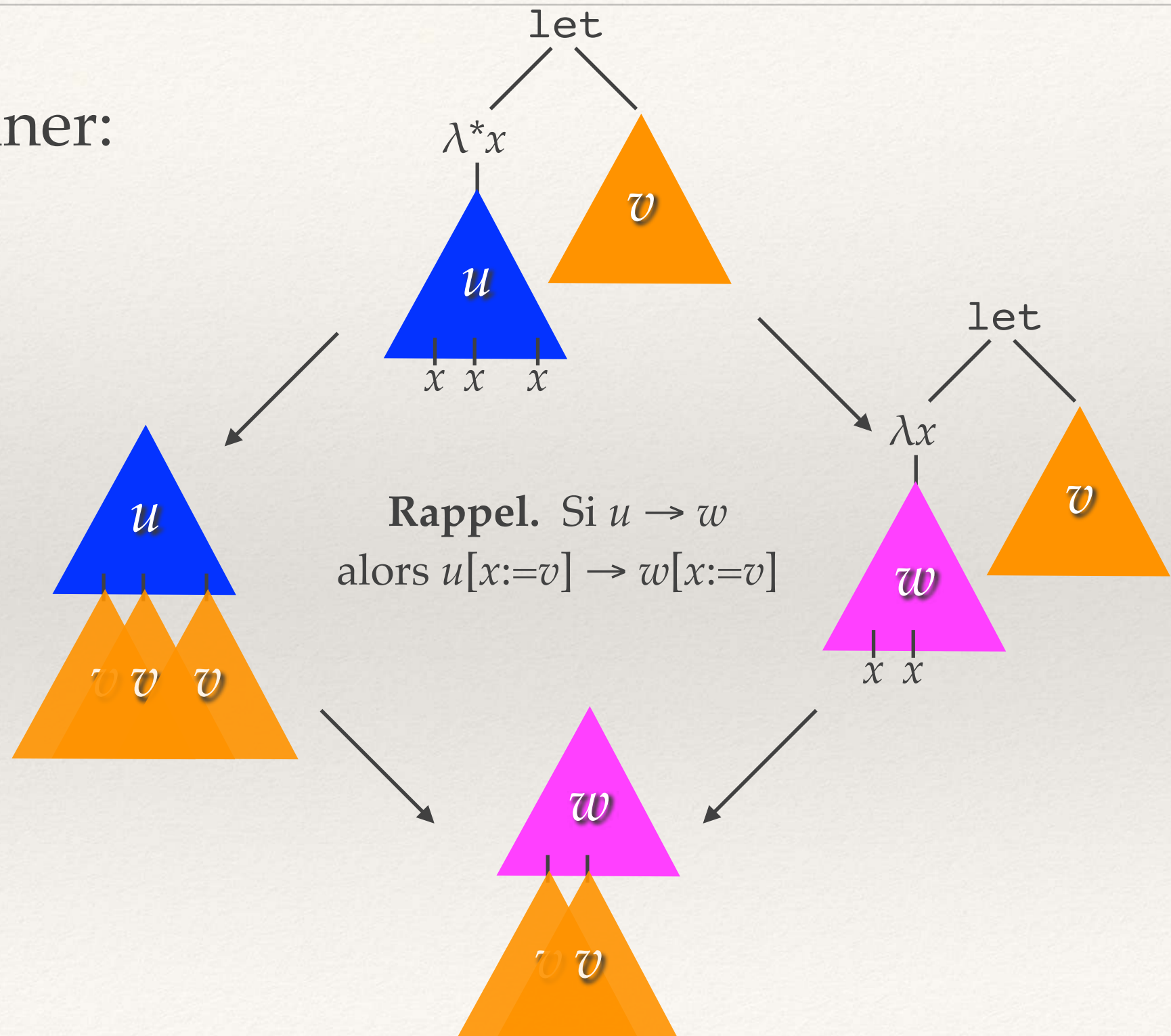
Le λ^* -calcul est localement confluent

❖ 3 cas à examiner:

❖ **Cas 2:**

$u \rightarrow w$,

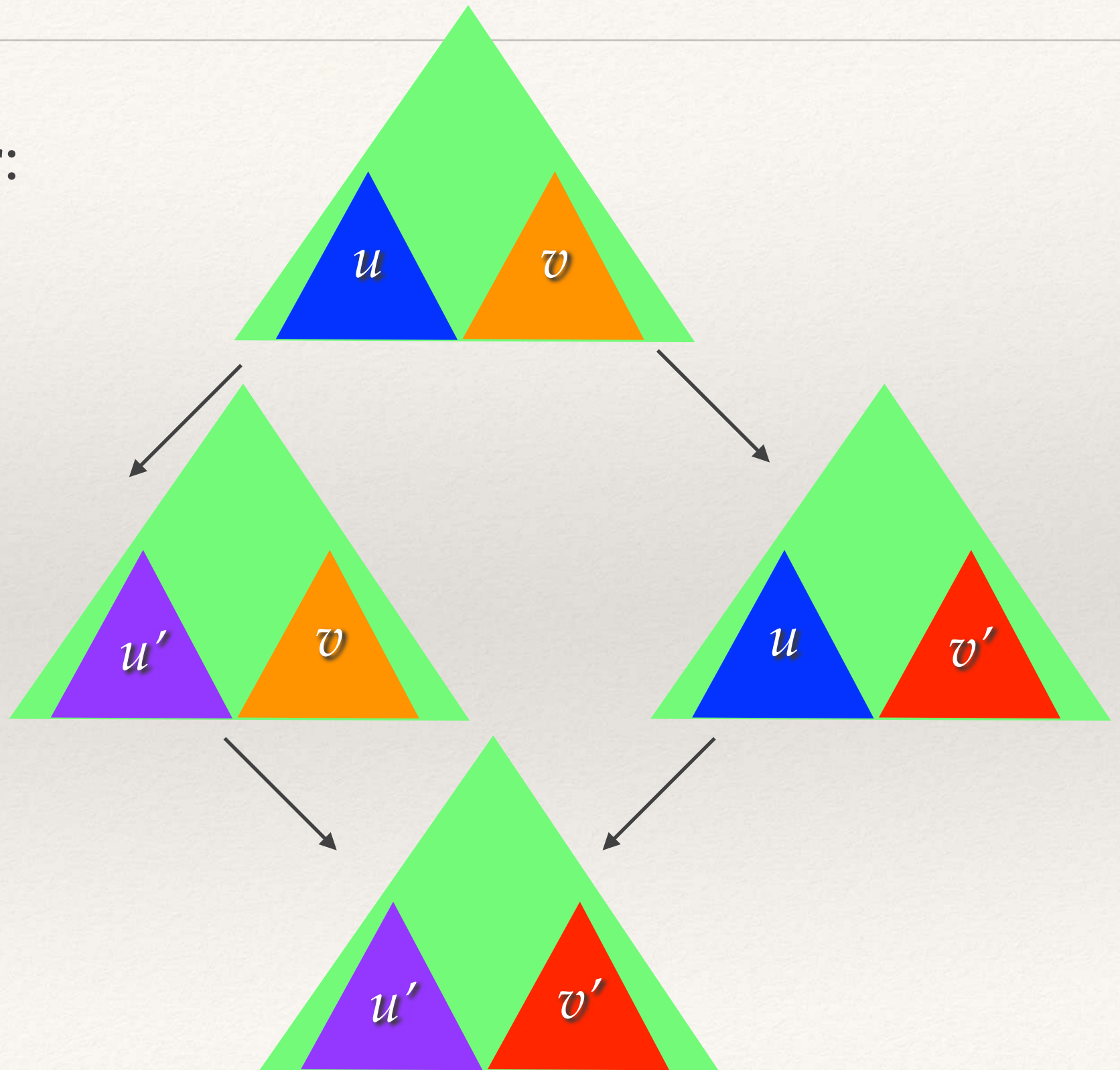
u sous la
partie λ^*x
d'un rédex



Le λ^* -calcul est localement confluent

❖ 3 cas à examiner:

❖ **Cas 3:**
rédex **disjoints**
 $u \rightarrow u', v \rightarrow v'$



Confluence du λ^* -calcul

- ❖ Le λ^* -calcul termine, et est localement confluent.
- ❖ Donc il est confluent (Newman)
- ❖ et tout λ^* -terme u a une **forme normale unique** $u \downarrow$

Lemme (Newman 1941). Toute relation localement confluyente et fortement normalisable est confluyente.

- ❖ **Note.** On peut identifier les λ^* -formes normales avec les λ -termes (= les λ^* -termes sans étoile)

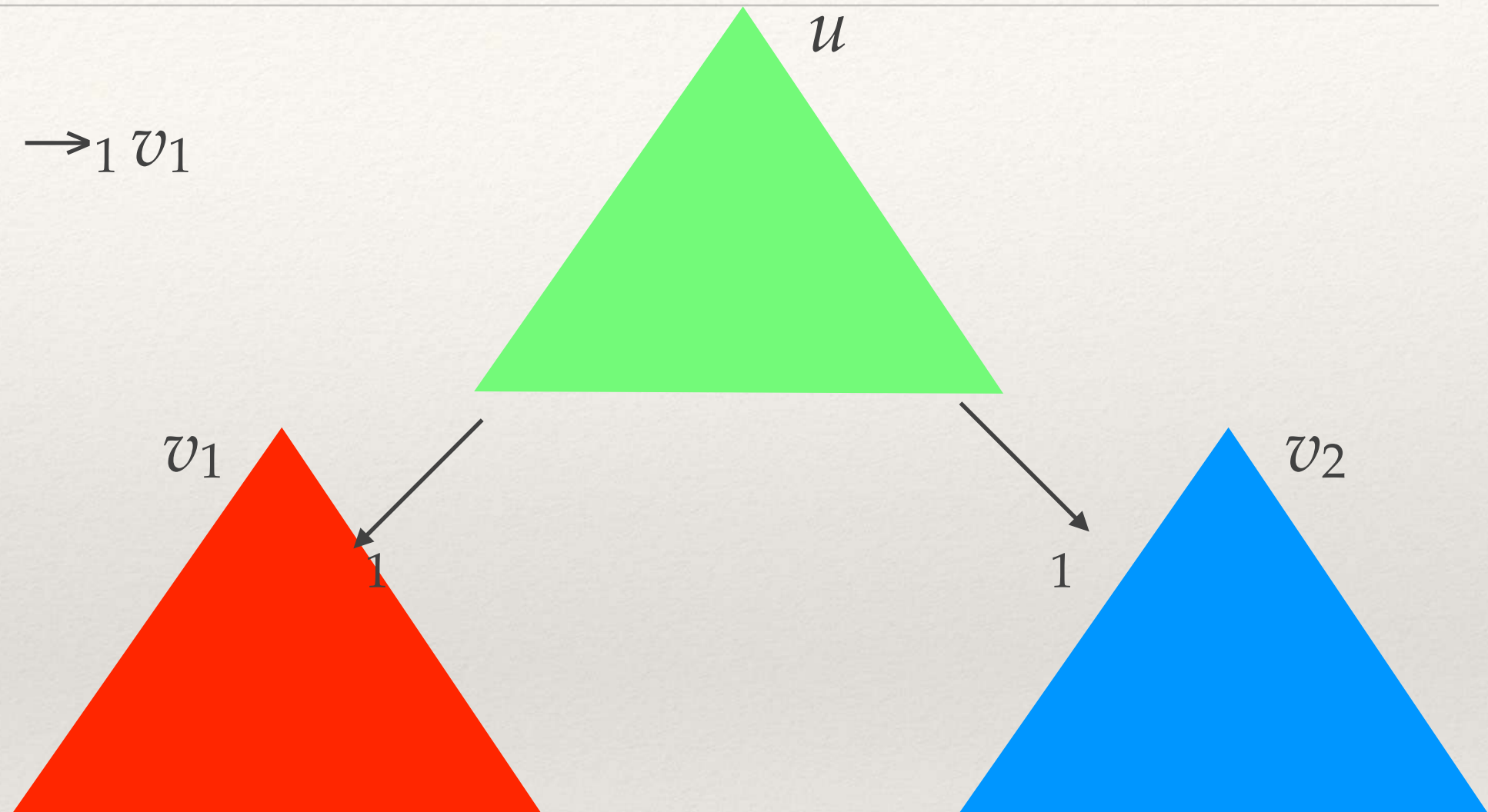
Confluence du λ -calcul

La relation $\rightarrow_1$

- ❖ On définit E (effacement d'étoiles) : $\lambda^* \rightarrow \lambda$ par
$$E((\lambda^*x . s)t) \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda x . E(s))E(t)$$
(et $E(x) \stackrel{\text{def}}{=} x$, $E(uv) \stackrel{\text{def}}{=} E(u)E(v)$, etc.)
- ❖ Pour deux λ -(pas λ^*)termes u et v , on dit que $u \rightarrow_1 v$ ssi il existe un λ^* -terme u^* tel que $E(u^*)=u$ et $u^* \downarrow = v$
- ❖ ... autrement dit:
ajouter des étoiles sur certains β -réduces de u ,
puis β^* -normaliser.
- ❖ $\rightarrow_1$ est **fortement confluente**: la preuve en images...

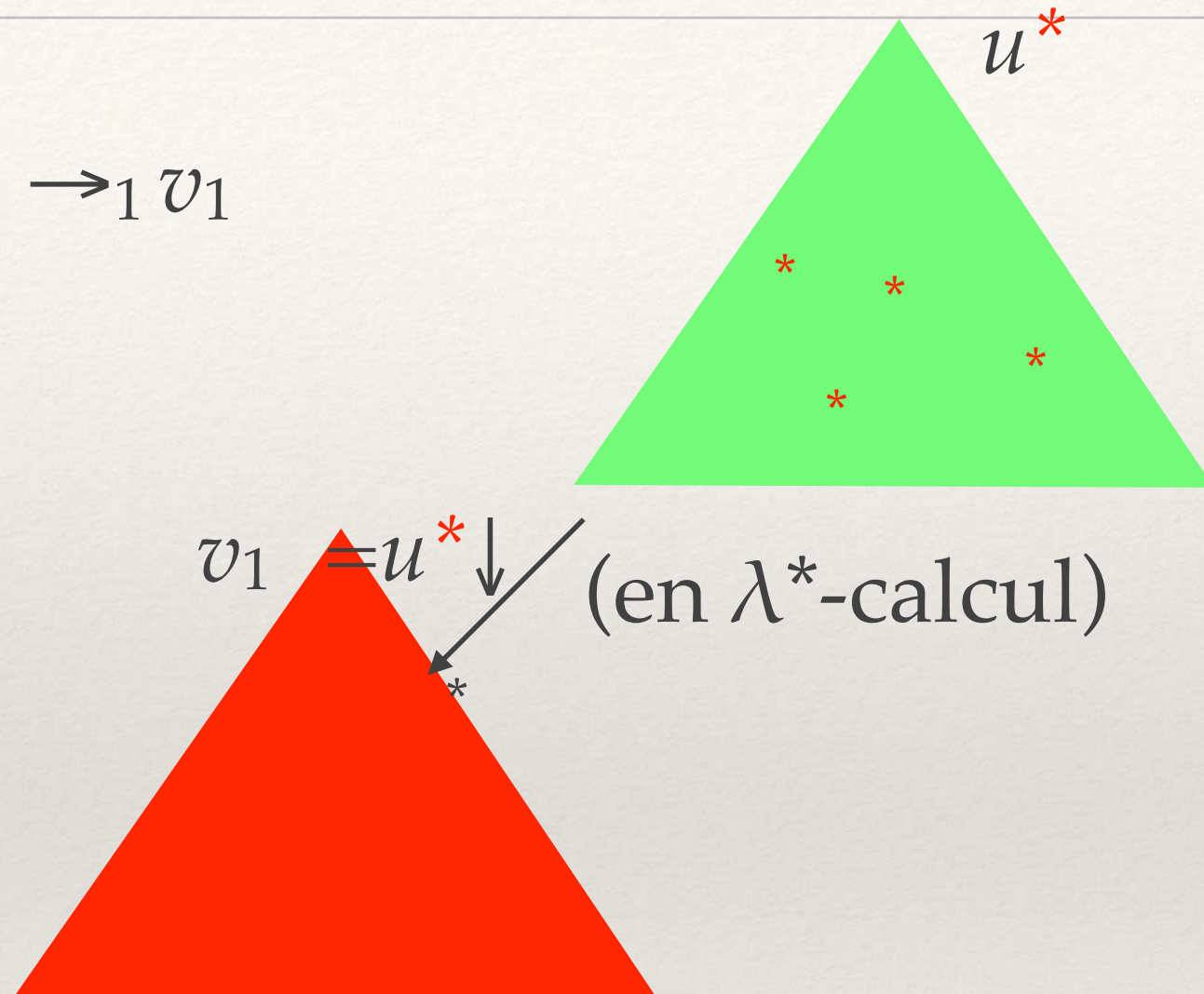
La relation $\rightarrow_1$ est fortement confluente

- ❖ Supposons $u \rightarrow_1 v_1$
et $u \rightarrow_1 v_2$



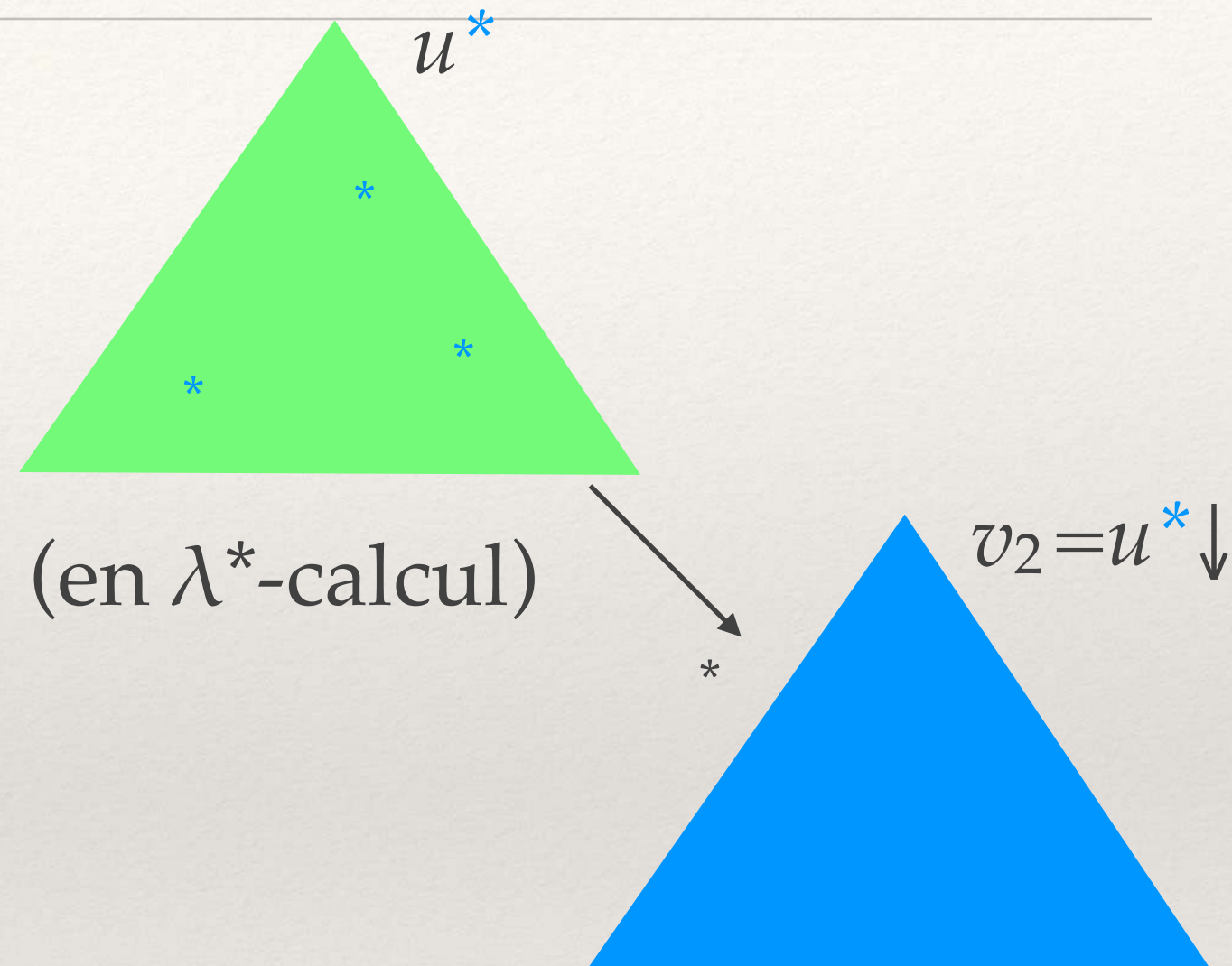
La relation $\rightarrow_1$ est fortement confluente

- ❖ Supposons $u \rightarrow_1 v_1$
et $u \rightarrow_1 v_2$



La relation $\rightarrow_1$ est fortement confluente

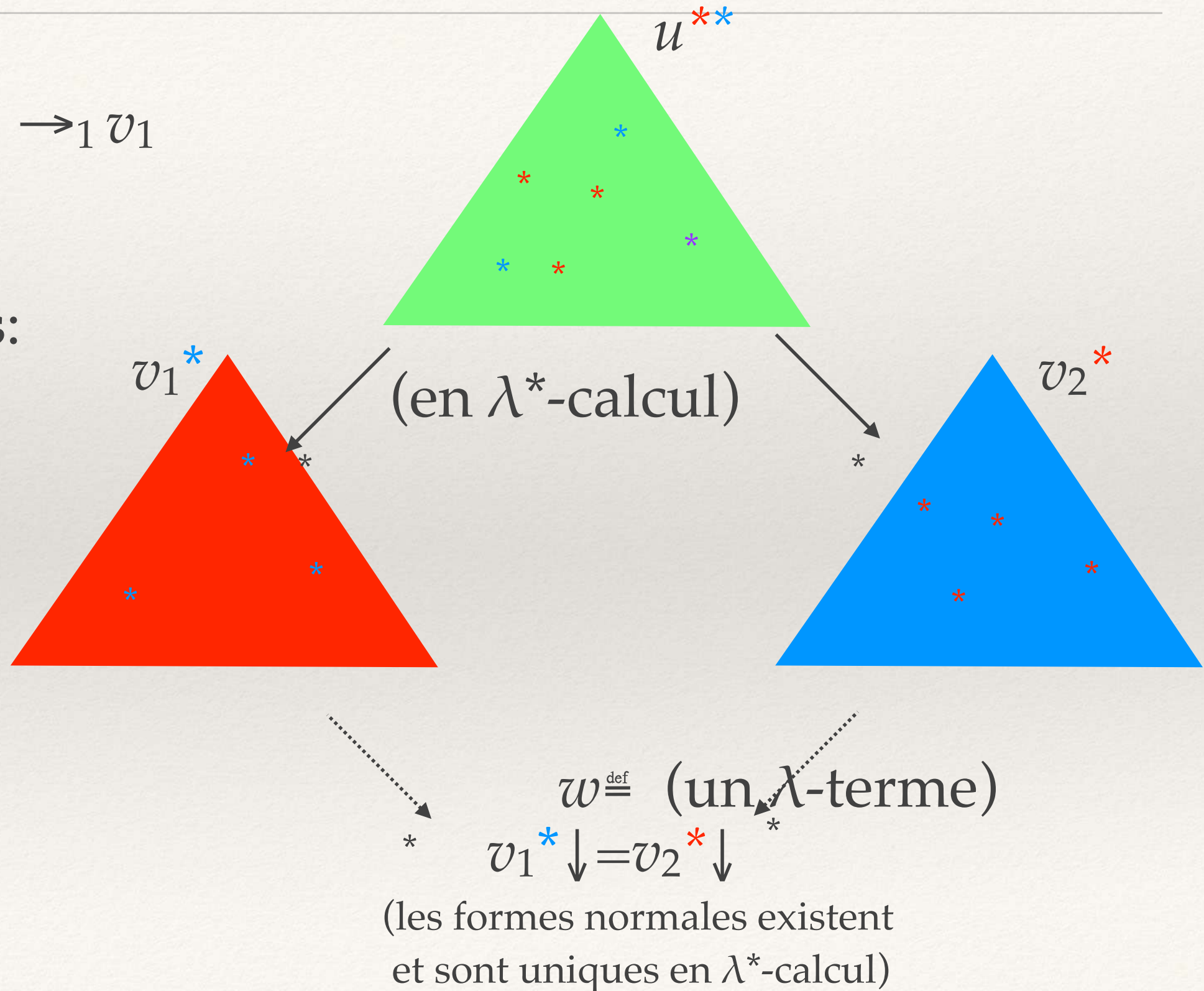
- ❖ Supposons $u \rightarrow_1 v_1$
et $u \rightarrow_1 v_2$



La relation $\rightarrow_1$ est fortement confluente

❖ Supposons $u \rightarrow_1 v_1$
et $u \rightarrow_1 v_2$

❖ Superposons:

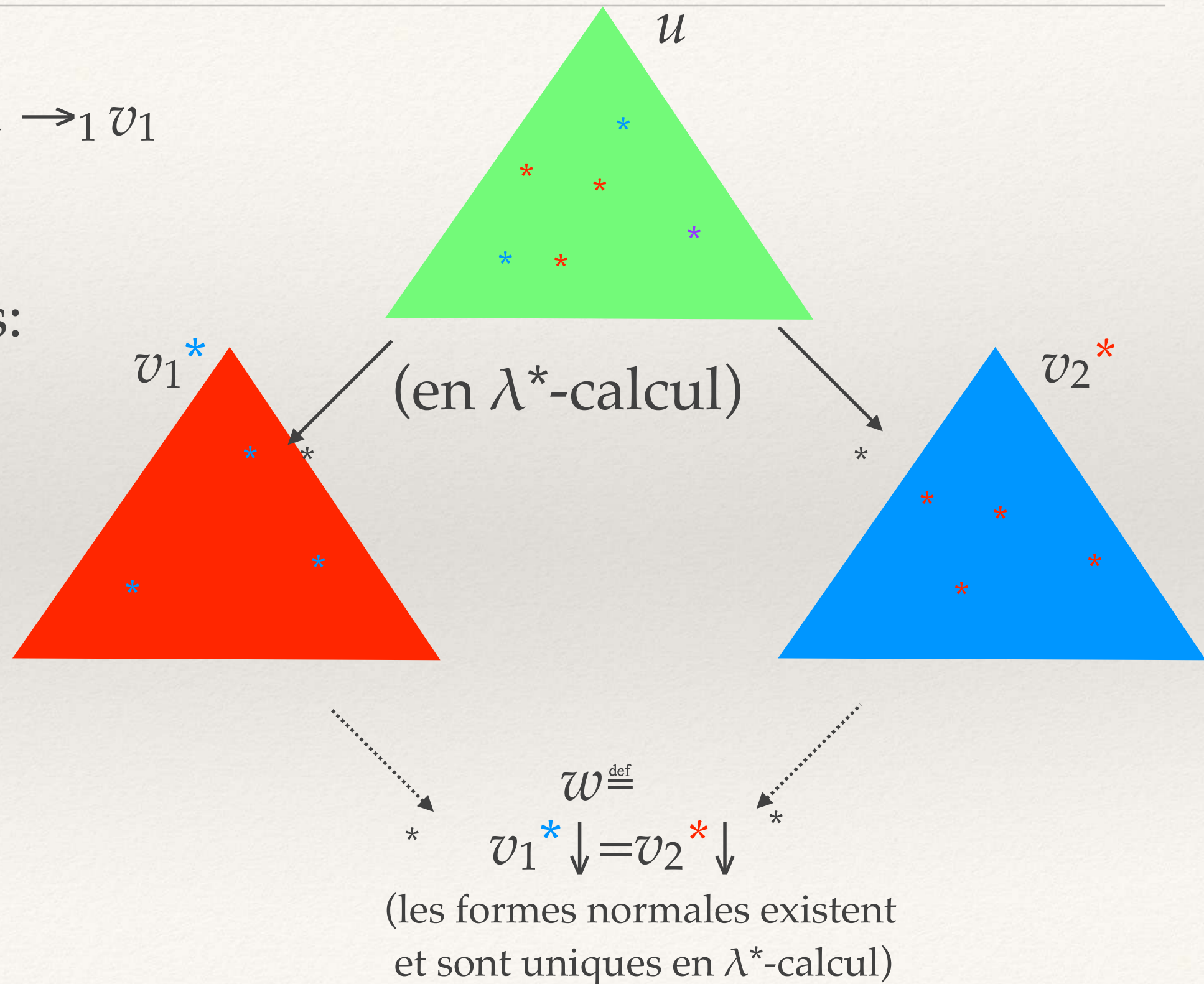


La relation $\rightarrow_1$ est fortement confluente

❖ Supposons $u \rightarrow_1 v_1$
et $u \rightarrow_1 v_2$

❖ Superposons:

❖ Donc
 $v_1 \rightarrow_1 w$ et
 $v_2 \rightarrow_1 w$

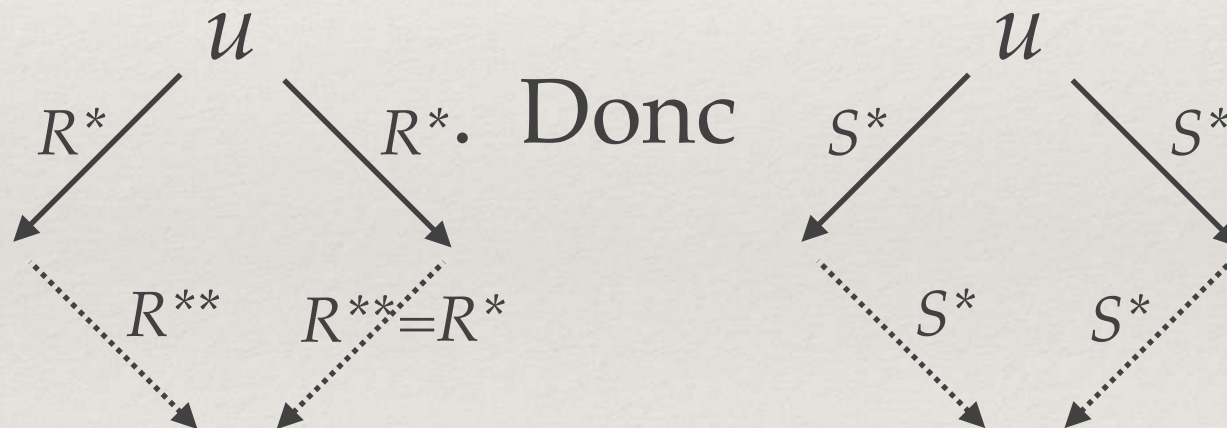


Confluence de $\rightarrow$

- ❖ **Lemme.** Si R et S sont deux relations binaires, et:
(1) $R \subseteq S \subseteq R^*$
(2) S est confluente
alors R est confluente.

- ❖ *Preuve.* Supposons

- ❖ et donc:



- ❖ On prend maintenant $R \stackrel{\text{def}}{=} \rightarrow$, $S \stackrel{\text{def}}{=} \rightarrow_1$: comme $\rightarrow_1$ est fortement confluente, elle est confluente, et donc $\rightarrow$ aussi

Confluence de $\rightarrow$

- ❖ **Théorème.** Le λ -calcul avec β -réduction est confluente.
- ❖ La preuve usuelle utilise une notion de **réductions parallèles**... que vous verrez en TD.
- ❖ Si vous regardez bien, vous verrez que la relation de réduction parallèle est en fait identique à $\rightarrow_1$

La prochaine fois

La prochaine fois

- ❖ Pouvoir expressif:
machines de Turing $\equiv$ fonctions récursives $\equiv$ λ -calcul
- ❖ Combinateurs de point fixe