

DM, λ -calcul, 2025

à rendre le 08 avril 2025 au plus tard, à `jgl@lmf.cnrs.fr`

Correction.

Notes préliminaires. Les réponses doivent être claires ; une réponse juste mais pas claire ne vaut pas mieux qu'une réponse incorrecte.

Toute affirmation doit être justifiée, par une preuve ou par une référence au cours. Aucune référence en avant n'est autorisée. N'oubliez pas de vérifier les hypothèses des résultats que vous utilisez. « Par récurrence » ne veut rien dire si vous ne dites pas sur quoi vous faites la récurrence, et au besoin le long de quel ordre bien fondé.

Ceci est un devoir à la maison. Vous avez donc le temps de vous relire : pas de faute d'orthographe, pas de rature, pas de question dans le désordre, notamment.

N'inventez pas vos propres notations, et utilisez celles de l'énoncé, ou du cours.

La correction sera effectuée question par question. Toute réponse à une question doit donc être lisible indépendamment des autres réponses aux questions. Toute référence à un lemme auxiliaire, à une construction ou à une définition que vous auriez faite dans une autre question sera ignorée.

Si vous le souhaitez, je mettrai le source $\text{\LaTeX}$ de ce sujet en ligne, et vous pourrez écrire votre solution en donnant votre nom comme argument de la commande `\author` en tête de document, puis écrire vos réponses entre les différentes `\begin{solution}` et `\end{solution}`. Envoyez-moi ensuite le pdf, pas le source.

Annotations : $\square\square\square\square$ trivial, $\blacksquare\square\square\square$ très facile et court, $\blacksquare\square\square\square$ facile, moyennement long, $\blacksquare\blacksquare\square\square$ assez long ou difficile, $\blacksquare\blacksquare\blacksquare\square$ difficile ou long, $\blacksquare\blacksquare\blacksquare\blacksquare$ très difficile et long. (Notes en conséquence.)

La section 1 est indépendante des suivantes. Les sections 2 et 3 ne sont pas indépendantes.

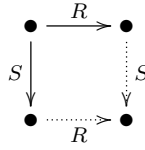
L'examen contiendra peut-être une suite à ce DM.

1 Confluence de la $\beta\eta$ -réduction

On étudie des critères de confluence pour des relations de réécriture abstraites, c'est-à-dire des relations binaires sur un ensemble A .

Une relation binaire R sur A est, formellement, juste un sous-ensemble de $A \times A$. On notera souvent $a \xrightarrow{R} b$ au lieu de $(a, b) \in R$.

Deux relations binaires R et S *commutent* si et seulement si :



autrement dit, si pour tous a, b, c tels que $a \xrightarrow{R} b$ et $a \xrightarrow{S} c$, il existe un d tel que $b \xrightarrow{S} d$ et $c \xrightarrow{R} d$.

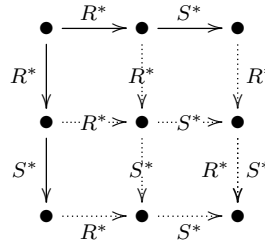
Pour toutes relations binaires R et S , on notera $R;S$ la relation définie par $(a, b) \in R;S$ si et seulement s'il existe a_1 tel que $a \xrightarrow{R} a_1 \xrightarrow{S} b$; et pour tout $n \geq 0$, R^n la relation $\underbrace{R; R; \dots; R}_{n \text{ fois}}$ (si $n = 0$, c'est par convention la relation d'égalité : $(a, b) \in R^0$ si et seulement si $a = b$).

On notera R^* la clôture réflexive-transitive d'une relation binaire R . Autrement dit, $a \xrightarrow{R^*} b$ si et seulement s'il existe $n \geq 0$ (0 est autorisé) tel que $(a, b) \in R^n$.

Question 1 ■■■■■ Montrer que, si R et S sont confluentes et si R^* et S^* commutent, alors :

- (a) $R^*; S^*$ est fortement confluente ;
- (b) $R \cup S$ et $R^*; S^*$ ont la même clôture réflexive-transitive ;
- (c) $R \cup S$ est confluente.

(a) On forme le diagramme :



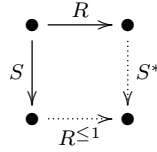
où le carré en haut à gauche est par confluence de R , le carré en bas à droite est par confluence de S et les deux autres sont par la commutation de R^* et de S^* .

(b) Si $a \xrightarrow{R^*} b \xrightarrow{S^*} c$, alors $a \xrightarrow{(R \cup S)^*} b \xrightarrow{(R \cup S)^*} c$, donc $a \xrightarrow{(R \cup S)^*} c$. Donc $R^*; S^* \subseteq (R \cup S)^*$, d'où $(R^*; S^*)^* \subseteq (R \cup S)^*$.

Réciproquement, si $a \xrightarrow{(R \cup S)^*} b$, on peut trier les réécritures par blocs (possiblement vides) de R^* , puis de S^* , puis de R^* , etc., donc $a \xrightarrow{(R^*; S^*)^*} b$. Formellement (et de façon légèrement différente), ceci se démontre par récurrence sur la longueur n de la réduction de a à b par $(R \cup S)^*$. Si $n = 0$, c'est évident. Sinon, on regarde la première réduction : si c'est par R , on a $R \subseteq R^* \subseteq R^*; S^*$, et si c'est par S , on a $S \subseteq S^* \subseteq R^*; S^*$; puis on applique l'hypothèse de récurrence sur le reste de la réduction.

(c) On a vu en cours que toute relation fortement confluente est confluente. Donc, par (a), $R^*; S^*$ est confluente. En utilisant (b), $R \cup S$ est donc aussi confluente, puisque la propriété de confluence d'une relation ne dépend que de sa clôture réflexive-transitive.

On dit que R pseudo-commute avec S si et seulement si :



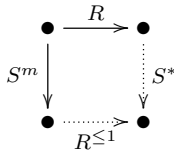
où $R^{≤1} = R^0 \cup R^1$. (En général, $R^{≤n}$ est définie comme l'union de $R^0, R^1, \dots, R^n$.) On notera bien que « R pseudo-commute avec S » n'est pas équivalent à « S pseudo-commute avec R ».

Question 2 ■■■■■ Montrer que si R pseudo-commute avec S , alors R^* et S^* commutent.

On démontre d'abord que l'on a le carré commutatif suivant, qui est celui définissant la pseudo-commutation, sauf que le S de gauche y est remplacé par un S^* :

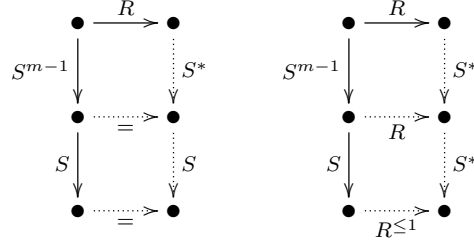


Autrement dit, on démontre que, si R pseudo-commute avec S , alors R pseudo-commute avec S^* . Explicitement, on démontre que :



pour tout entier m , par récurrence sur m . Si $m = 0$, c'est évident. Sinon,

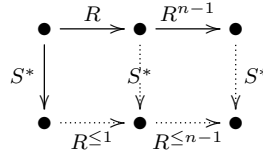
on est dans l'une des deux situations suivantes :



où le carré du haut dans chaque cas est par hypothèse de récurrence. Le carré du bas est soit un carré trivial (cas de gauche) soit un carré obtenu par pseudo-commutation de R avec S (cas de droite).

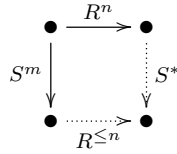
On suppose maintenant $(a, b) \in R^n$ et $(a, c) \in S^*$, et on montre qu'il existe d tel que $(b, d) \in S^*$ et $(c, d) \in R^{\leq n}$ par récurrence sur n .

Si $n = 0$, c'est évident. Sinon, c'est par :



où le carré de gauche est par (1) et le carré de droite par hypothèse de récurrence.

Une autre stratégie de démonstration consiste à montrer que l'on a :



en une seule fois, par récurrence sur (n, m) ordonné lexicographiquement. C'est essentiellement la même preuve.

On en déduit le *lemme de Hindley-Rosen* : si R et S sont deux relations confluentes, et si R pseudo-commute avec S , alors $R \cup S$ est confluent.

On considère les relations :

$$\begin{aligned}
 (\beta) \quad & (\lambda x.u)v \rightarrow u[x := v] \\
 (\eta) \quad & \lambda x.ux \rightarrow u \quad \text{si } x \notin \text{fv}(u).
 \end{aligned}$$

Par convention, elles passent au contexte, et tous les termes sont compris à α -équivalence près. On écrira $s \rightarrow_\beta t$ si s se réécrit en t par (β) , $s \rightarrow_\eta t$ si s se

réécrit en t par (η) , $s \rightarrow_{\beta\eta} t$ si $s \rightarrow_{\beta} t$ ou $s \rightarrow_{\eta} t$. La relation $\rightarrow_{\beta\eta}$ est la $\beta\eta$ -réduction.

On pourra utiliser sans preuve que si $u \rightarrow_{\beta\eta} u'$ alors $\text{fv}(u') \subseteq \text{fv}(u)$.

Question 3 ■■■■ Montrer que $\rightarrow_{\eta}$ est fortement confluente.

D'abord : () si $\lambda x.ux$ est un (η) -redex ($x \notin \text{fv}(u)$) et $u \rightarrow_{\eta} u'$, alors les deux (η) -réduits $\lambda x.u'x$ et u ont un (η) -réduit commun en une étape, qui est u' . En effet, $x \notin \text{fv}(u')$ par le résultat admis, donc $\lambda x.u'x \rightarrow_{\eta} u'$.*

On montre ensuite que si $s \rightarrow_{\eta} t_1, t_2$ alors t_1 et t_2 ont un (η) -réduit en une étape en commun. Si l'un des deux (η) -redex est au-dessus de l'autre, alors on conclut par (). Sinon, ils sont de la forme $\lambda x.ux$ et $\lambda y.vy$, aucun des deux n'étant au-dessus de l'autre ; t_1 est obtenu en contractant le premier en u , t_2 est obtenu en contractant le second en v , et dans chaque cas il suffit de contracter l'autre pour obtenir un (η) -réduit commun.*

On peut aussi faire un argument formel, par récurrence sur la taille de s . On retrouve le cas des redex l'un au-dessus de l'autre lorsque s est une λ -abstraction et l'un des redexes. On retrouve le cas des redex dont aucun n'est au-dessus de l'autre lorsque s est une application uv , l'un des redex étant dans u et l'autre dans v . Tous les autres cas sont immédiats.

Question 4 ■■■■ Montrer que :

- (a) si $u \rightarrow_{\eta} u'$ alors $u[x := v] \rightarrow_{\eta} u'[x := v]$;
- (b) si $v \rightarrow_{\eta} v'$ alors $u[x := v] \rightarrow_{\eta}^* u[x := v']$;
- (c) $\rightarrow_{\beta}$ pseudo-commute avec $\rightarrow_{\eta}$.

(a) Récurrence immédiate sur u . Lorsque u est lui-même le η -redex contracté, disons $\lambda y.u'y$ avec $y \notin \text{fv}(u')$, on peut aussi supposer, à α -renommage près, que $x \neq y$ et $y \notin \text{fv}(v)$, de sorte que $u[x := v] = \lambda y.u'[x := v]y$. Comme y n'est libre ni dans u' ni dans v , il n'est pas libre dans $u'[x := v]$, donc $u[x := v] \rightarrow_{\eta} u'[x := v]$.

(b) Par récurrence sur u . Si u est une variable, soit $u = x$ et on a $u[x := v] = v \rightarrow_{\eta} v' = u[x := v']$, soit u est une autre variable et la réduction se fait en 0 étape. Si u est une application st , par hypothèse de récurrence on a $s[x := v] \rightarrow_{\eta}^ s[x := v']$ et $t[x := v] \rightarrow_{\eta}^* t[x := v']$, d'où la conclusion (le nombre de η -réductions peut donc dépasser 1). Le cas des abstractions est immédiat.*

(c) Soit $u \rightarrow_{\beta} u'$ et $u \rightarrow_{\eta} u''$. On démontre l'existence d'un λ -terme u''' tel que $u' \rightarrow_{\eta}^ u'''$ et $u'' \rightarrow_{\beta}^{\leq 1} u'''$ par récurrence sur la taille de u . Le cas est impossible si u est une variable.*

Si u est une application st et la (β) -réduction s'opère dans s , la (η) -réduction dans t , alors $u' = s't$ et $u'' = st'$ avec $s \rightarrow_\beta s'$, $t \rightarrow_\eta t'$. Donc $u' \rightarrow_\eta s't'$ et $u'' \rightarrow_\beta s't'$.

Le cas est similaire si $u = st$, la (β) -réduction s'opère dans t , et la (η) -réduction dans s .

Si $u = st$ et les deux réductions se font dans s (ou les deux se font dans t), le résultat s'obtient par hypothèse de récurrence.

Si u est une application, et est en fait le (β) -redex contracté, disons $(\lambda x.u_1)v_1$, alors $u' = u_1[x := v_1]$.

- Si la (η) -réduction se fait dans u_1 , on a $u'' = (\lambda x.u'_1)v_1$ où $u_1 \rightarrow_\eta u'_1$, et alors $u' \rightarrow_\eta u'_1[x := v_1]$ par (a), et $u'' \rightarrow_\beta u'_1[x := v_1]$.
- Si la (η) -réduction se fait dans v_1 , on a $u'' = (\lambda x.u_1)v'_1$ où $v_1 \rightarrow_\eta v'_1$, et alors $u' \rightarrow_\eta^* u_1[x := v'_1]$ par (b), et $u'' \rightarrow_\beta u_1[x := v'_1]$.
- Il y a un troisième cas : si $\lambda x.u_1$ est lui-même le (η) -redex contracté, autrement dit si u_1 est de la forme u_2x , avec $x \notin \text{fv}(u_2)$. On a alors $u' = (u_2x)[x := v_1] = u_2v_1$ (car $x \notin \text{fv}(u_2)$), et $u'' = u_2v_1$.

Si u est une λ -abstraction, alors le résultat s'obtient par hypothèse de récurrence si les deux réductions se passent dans le corps de l'abstraction. Sinon, u est de la forme $\lambda x.u_1x$ et est l' (η) -redex contracté ; donc $x \notin \text{fv}(u_1)$ et donc $u'' = u_1$. On a deux sous-cas.

- Si la (β) -réduction se produit dans u_1 , disons $u_1 \rightarrow_\beta u'_1$, avec $u' = \lambda x.u'_1x$, alors par le résultat admis on a $\text{fv}(u'_1) \subseteq \text{fv}(u_1)$ donc $x \notin \text{fv}(u'_1)$, ce qui permet d'affirmer que $u' \rightarrow_\eta u'_1$, et d'autre part $u'' = u_1 \rightarrow_\beta u'_1$.
- Si u_1x est le (β) -redex contracté, c'est-à-dire si u_1 est de la forme $(\lambda y.u'_1)$, alors $u' = \lambda x.u'_1[y := x]$. Mais alors $u'' = u_1 = \lambda y.u'_1$ lui est α -équivalent, autrement dit $u' = u''$, puisque l'on raisonne à α -équivalence près.

Question 5 □□□□ En déduire que la $\beta\eta$ -réduction est confluente.

Par le théorème 1 du cours (`lambda.pdf`), $R \stackrel{\text{def}}{=} \rightarrow_\beta$ est confluente. $S \stackrel{\text{def}}{=} \rightarrow_\eta$ est confluente par la **Question 3**. R quasi-commute avec S par la **Question 4**. On peut donc appliquer le lemme de Hindley-Rosen : $R \cup S$ est confluente, c'est-à-dire $\rightarrow_{\beta\eta}$ est confluente.

2 Le théorème d'anti-standardisation

On revient au λ -calcul avec β -réduction.

Pour tout λ -terme u , on définit $\nu(u)$ comme la longueur de la plus longue réduction partant de u si $u \in SN$ (l'ensemble des termes fortement normalisants), comme ∞ sinon. On notera que $\nu(u) = \infty$ si et seulement s'il y a une réduction infinie partant de u . On notera aussi que $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ est bien fondé, et l'on peut donc effectuer des récurrences sur $\nu(u)$. On fera aussi attention que : dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on n'a pas $n < n + 1 \dots$ uniquement si $n < \infty$; $u \rightarrow v$ n'entraîne pas $\nu(u) > \nu(v)$ (seulement $\nu(u) \geq \nu(v)$), sauf si u est fortement normalisable.

On note $|u|$ la taille d'un λ -terme u .

Question 6 ■■■■ Pour tous λ -termes $s, u_1, \dots, u_m$, avec $m \geq 1$, montrer que :

$$\nu((\lambda x.s)u_1 \cdots u_m) = \begin{cases} \nu(s[x := u_1]u_2 \cdots u_m) + 1 & \text{si } x \in \text{fv}(s) \\ \nu(su_2 \cdots u_m) + \nu(u_1) + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est fortement conseillé de procéder par doubles inégalités.

On peut β -réduire une fois et obtenir $s[x := u_1]u_1 \cdots u_m$, donc $\nu((\lambda x.s)u_1 \cdots u_m) \geq \nu(s[x := u_1]u_2 \cdots u_m) + 1$. Si x n'est pas libre dans s , on peut à la place normaliser u_1 d'abord, et si cela termine, β -réduire, montrant que $\nu((\lambda x.s)u_1 \cdots u_m) \geq \nu(su_2 \cdots u_m) + \nu(u_1) + 1$. Dans le sens inverse, traitons d'abord le cas où x est libre dans s . Considérons une réduction quelconque partant de $(\lambda x.s)u_1 \cdots u_m$, disons de longueur N (éventuellement ∞). Elle fait N_0 étapes dans s , N_1 dans $u_1, \dots, N_m$ dans u_m , ce qui produit $(\lambda x.u'_0)u'_1 \cdots u'_m$, puis elle effectue éventuellement la β -réduction vers $u'_0[x := u'_1]u'_2 \cdots u'_m$, puis elle fait N' réductions supplémentaires. Donc $N = N_1 + \dots + N_m + N'$. Au lieu de cela, nous pouvons β -réduire immédiatement et obtenir $s[x := u_1]u_2 \cdots u_m$, puis réduire toutes les occurrences de u_1 à u'_1 (en au moins N_1 étapes puisque x apparaît au moins une fois dans s), puis faire les $N_2 + \dots + N_m$ réductions dans $u'_2, \dots, u'_m$. Ceci montre que $\nu(s[x := u_1]u_2 \cdots u_m) \geq N_1 + N_2 + \dots + N_m + N' = N$. En prenant la borne supérieure sur N , $\nu((\lambda x.s)u_1 \cdots u_m) \leq \nu(s[x := u_1]u_1 \cdots u_m) + 1$. Si au contraire x n'est pas libre dans s , alors on fait d'abord les N_1 réductions dans u_1 , puis on β -réduit et on obtient $su_2 \cdots u_m$, puis on fait les $N_2 + \dots + N_m$ réductions dans $u_2, \dots, u_m$, et enfin les N' réductions restantes. Donc $\nu(su_2 \cdots u_m) \geq N_2 + \dots + N_m + N'$, et donc $N \leq \nu(su_2 \cdots u_m) + \nu(u_1) + 1$. En prenant le sup sur N , on conclut.

La stratégie perpétuelle sélectionne le redex le plus à gauche $(\lambda x.u)v$ tel que x soit libre dans u ou que v soit normal, le cas échéant (sinon, la réduction s'arrête).

Soit $\rightarrow_p$ la β -réduction selon la stratégie perpétuelle. Explicitement, $u \rightarrow_p u'$ est défini par récurrence sur la taille de u comme suit.

- (A) si u est en forme normale de tête $\lambda x_1, \dots, x_n. x u_1 \dots u_m$, si $u_1, \dots, u_{i-1}$ sont en forme normale, et si $u_i \rightarrow_p u'_i$ ($1 \leq i \leq m$), alors
 $u \rightarrow_p \lambda x_1, \dots, x_n. x u_1 \dots u_{i-1} u'_i u_{i+1} \dots u_m$;
- (B) si $u = \lambda x_1, \dots, x_n. (\lambda x. s) u_1 u_2 \dots u_m$ avec $m \geq 1$,
 - (a) $u \rightarrow_p \lambda x_1, \dots, x_n. s[x := u_1] u_2 \dots u_m$ si $x \in \text{fv}(s)$ ou u_1 est normal ;
 - (b) $u \rightarrow_p \lambda x_1, \dots, x_n. (\lambda x. s) u'_1 u_2 \dots u_m$ si $u_1 \rightarrow_p u'_1$ et $x \notin \text{fv}(s)$.

Attention, $\rightarrow_p$ n'est *pas* destinée à passer aux contextes : la description ci-dessus est la description complète de $\rightarrow_p$.

On notera que pour tout λ -terme u , soit u est en forme normale (pour la β -réduction ordinaire), soit u a un unique $\rightarrow_p$ -redex. En particulier, la stratégie perpétuelle est déterministe. De plus, un λ -terme a un $\rightarrow_p$ -réduit en une étape si et seulement s'il n'est pas normal.

Pour tout terme u , soit $\nu_p(u)$ la longueur de l'unique $\rightarrow_p$ -réduction partant de u (éventuellement ∞). Il est clair que $\nu_p(u) \leq \nu(u)$, puisque toute $\rightarrow_p$ -réduction est une $\rightarrow$ -réduction.

On note SN l'ensemble des λ -termes fortement normalisables.

Question 7 □□□□ Montrer que $\nu(\lambda x_1, \dots, x_n. t) = \nu(t)$ et que $\nu_p(\lambda x_1, \dots, x_n. t) = \nu_p(t)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, toutes variables $x_1, \dots, x_n$ et tout λ -terme t .

Il suffit d'observer que $\lambda x. t \rightarrow \lambda x. t'$ si et seulement si $t \rightarrow t'$ pour to ; pour $\rightarrow_p$, la définition a été conçue pour être invariante en fonction du nombre de λ -abstractions en tête de t et t' , donc $\lambda x. t \rightarrow_p \lambda x. t'$ si et seulement si $t \rightarrow_p t'$. On en déduit par récurrence sur n que $\lambda x_1, \dots, x_n. t \rightarrow \lambda x_1, \dots, x_n. t'$ si et seulement si $t \rightarrow t'$, et de même pour $\rightarrow_p$.

Question 8 ■■■■■ Soit u un λ -terme et $k \in \mathbb{N}$ (donc $k \neq \infty$), avec $(k, |u|)$ minimal dans l'ordre lexicographique tel que $\nu_p(u) < k \leq \nu(u)$. Montrer que :

- (A) si u est sous forme normale de tête $\lambda x_1, \dots, x_n. x u_1. u_m$, c'est impossible.
- (B) si u a pour forme de tête $\lambda x_1, \dots, x_n. (\lambda x. s) u_1 \dots u_m$ avec $m \geq 1$:
 - (a) si $x \in \text{fv}(s)$, ou u_1 est normal, c'est impossible ;
 - (b) si $x \notin \text{fv}(s)$ et u_1 n'est pas normal, alors $u_1 \rightarrow_p u'_1$ pour un certain λ -terme u'_1 , et en posant $j \stackrel{\text{def}}{=} \nu(s u_2 \dots u_m)$, montrer que $j + \nu(u'_1) < k - 2$, donc que $j < \infty$, puis que $\nu(u_1) \geq k - 1 - j$, mais que la double inégalité $\nu_p(u_1) < k - 1 - j \leq \nu(u_1)$ est impossible ; en déduire une contradiction dans ce cas aussi.

Donc, pour tout λ -terme u , pour tout $k \in \mathbb{N}$, il est impossible que $\nu_p(u) < k \leq \nu(u)$.

(A) Si u est sous forme normale de tête $\lambda x_1, \dots, x_n. x u_1. u_m$, alors la stratégie perpétuelle fera des réductions dans u_1 , puis dans $u_2, \dots$, puis dans u_m , donc $\nu_p(u) = \sum_{i=1}^m \nu_p(u_i)$. Toute réduction de longueur $\geq k$ commence par une réduction de longueur k , qui fera un certain nombre k_1 réductions dans $u_1, \dots$, un certain nombre k_n dans u_n , dans n'importe quel ordre. Notamment, $k_1 + \dots + k_n = k$. En particulier, pour tout i , $k_i \leq k$ et $|u_i| < |u|$. Par minimalité on ne peut pas avoir $\nu_p(u_i) < k_i \leq \nu(u_i)$, or on a $k_i \leq \nu(u_i)$, par définition de k_i ; donc $\nu_p(u_i) \geq k_i$. Il s'ensuit que $\nu_p(u) = \sum_{i=1}^m \nu_p(u_i) \geq \sum_{i=1}^m k_i = k$, ce qui est absurde.

(B) Si la forme de tête de u est $\lambda x_1, \dots, x_n. (\lambda x. s) u_1 \dots u_m$ avec $m \geq 1$ à la place, alors nous avons deux cas. (Écrivons $\lambda \vec{x}$ au lieu de $\lambda x_1, \dots, x_m$. Par la **Question 7**, $\nu(\lambda \vec{x}. s) = \nu(s)$, un fait que nous utiliserons implicitement.)

— (a). Si x est libre dans s ou u_1 est normal, alors $\nu_p(u) = \nu_p(\lambda \vec{x}. s[x := u_1] u_2 \dots u_m) + 1$, donc ($k \geq 1$ et) $\nu_p(\lambda \vec{x}. s[x := u_1] u_2 \dots u_m) < k - 1$. Puisque $k - 1 < k$, par minimalité on ne peut pas avoir $\nu_p(\lambda \vec{x}. s[x := u_1] u_2 \dots u_m) < k - 1 \leq \nu(\lambda \vec{x}. s[x := u_1] u_2 \dots u_m)$. L'inégalité de gauche étant vraie, celle de droite ne l'est pas. Donc $\nu(\lambda \vec{x}. s[x := u_1] u_2 \dots u_n) < k - 1$.

Cependant, $\nu(\lambda \vec{x}. s[x := u_1] u_2 \dots u_n) = \nu(s[x := u_1] u_2 \dots u_n)$ par la **Question 7**. Par la **Question 6**, soit $x \in \text{fv}(s)$ et $\nu(u) = \nu(s[x := u_1] u_2 \dots u_m) + 1$, soit $x \notin \text{fv}(s)$ et $\nu(u) = \nu(s u_2 \dots u_m) + \nu(u_1) + 1$. Mais dans ce deuxième cas, u_1 est normal, donc $\nu(u_1) = 0$, et comme $x \notin \text{fv}(s)$, $s[x := u_1] u_2 \dots u_m$. Donc, dans les deux cas on a $\nu(u) = \nu(s[x := u_1] u_2 \dots u_m) + 1$.

Il s'ensuit que $\nu(u) < k$, contradiction.

— (b). Si x n'est pas libre dans u_1 et u_1 n'est pas normal, alors on a $\nu_p(u) = \nu_p(\lambda \vec{x}. (\lambda x. s) u'_1 u_2 \dots u_m) + 1$ où $u_1 \rightarrow_p u'_1$. Il s'ensuit que ($k \geq 1$ et) $\nu_p(\lambda \vec{x}. (\lambda x. s) u'_1 u_2 \dots u_m) < k - 1$. Puisque $k - 1 < k$, par minimalité on ne peut pas avoir $\nu_p(\lambda \vec{x}. (\lambda x. s) u'_1 u_2 \dots u_m) < k - 1 \leq \nu(\lambda \vec{x}. (\lambda x. s) u'_1 u_2 \dots u_m)$. L'inégalité de gauche étant vraie, celle de droite est fausse, donc $\nu(\lambda \vec{x}. (\lambda x. s) u'_1 u_2 \dots u_m) < k - 1$. Donc $\nu((\lambda x. s) u'_1 u_2 \dots u_m) < k - 1$ par la **Question 7**.

Par la **Question 6**, $\nu((\lambda x. s) u'_1 u_2 \dots u_m) = \nu(s u_2 \dots u_m) + \nu(u'_1) + 1$, donc $(*) j + \nu(u'_1) < k - 2$, où j est défini comme dans l'énoncé. Ceci implique que $j < \infty$, en premier lieu, car $(*)$ implique $j < k - 2 < \infty$. $(*)$ implique aussi que $k - 2 - j > 0$, donc $k - 2 - j \in \mathbb{N}$.

Ensuite, par la **Question 6**, $\nu(u) = j + \nu(u_1) + 1$. Comme $\nu(u) \geq k$ par hypothèse, $\nu(u_1) \geq k - 1 - j$.

Comme $k - 1 - j < k$, la minimalité implique qu'on ne peut pas avoir $\nu_p(u_1) < k - 1 - j \leq \nu(u_1)$. L'inégalité de droite étant vraie, c'est que l'inégalité de gauche est fausse. Donc $\nu_p(u_1) \geq k - 1 - j$. Or $\nu_p(u_1) = \nu_p(u'_1) + 1$, puisque $u_1 \rightarrow_p u'_1$ et $\rightarrow_p$ est déterministe, donc $\nu_p(u'_1) \geq k - 2 - j$. Mais $\nu_p(u'_1) \leq \nu(u'_1)$, et ceci contredit donc (*).

Question 9 ■■■■ En déduire que $\nu_p(u) = \nu(u)$ pour tout λ -terme u .

Comme $\nu_p(u) \leq \nu(u)$, il suffit de montrer $\nu(u) \leq \nu_p(u)$. Si ce n'était pas le cas, on aurait $\nu_p(u) < \nu(u)$. En particulier, il existerait un k dans $\mathbb{N}$ (pas seulement $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$) tel que $\nu_p(u) < k \leq \nu(u)$. En effet, si $\nu(u) < \infty$, on peut prendre $k \stackrel{\text{def}}{=} \nu(u)$. Sinon, comme $\nu_p(u) < \nu(u)$, en particulier $\nu_p(u) \in \mathbb{N}$, et on peut prendre $k \stackrel{\text{def}}{=} \nu_p(u) + 1$ par exemple. La **Question 8** implique que ce n'est pas possible, d'où le résultat.

Question 10 ■■■■ Montrer le *théorème d'anti-standardisation* : si u n'est pas fortement normalisable, alors la $\rightarrow_p$ -réduction à partir de u est infinie.

Si u n'est pas fortement normalisable, alors $\nu(u) = \infty$, donc $\nu_p(u) = \infty$.

3 Une fonction qui dépasse toutes les fonctions calculables

Pour tout $u \in SN$, on définit $h(u)$ comme suit :

$$h(\lambda x_1, \dots, x_n. x u_1 \dots u_m) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^m h(u_i) \quad (2)$$

$$h(\lambda x_1, \dots, x_n. (\lambda x. s) u_1 \dots u_m) \stackrel{\text{def}}{=} h(s[x := u_1] u_2 \dots u_m) + 1 \quad (3)$$

si $m \geq 1$,
et $x \in \text{fv}(s)$ ou u_1 est normal

$$h(\lambda x_1, \dots, x_n. (\lambda x. s) u_1 \dots u_m) \stackrel{\text{def}}{=} h(s u_2 \dots u_m) + h(u_1) + 1 \quad (4)$$

si $m \geq 1$,
 $x \notin \text{fv}(s)$, et u_1 n'est pas normal.

Ceci ressemble à une définition de $h(u)$ par récurrence sur la taille de la forme de tête de u , mais n'en est pas une : dans (3), le terme sur lequel h s'applique à droite n'est pas nécessairement plus petit que le terme de gauche.

Question 11 ■■■■ Montrer que $h(u)$ est bien défini pour tout $u \in SN$. Un point important de la question est : sur quoi faire porter la récurrence ?

On effectue une récurrence (forte) sur le couple $(\nu(u), |u|)$ ordonné lexicographiquement.

Dans le cas (2), on a $\nu(u_i) \leq \nu(u)$ pour tout i , car toute réduction dans un u_i induit une réduction dans u . De plus, la taille décroît : pour tout i , $|u_i| < |u|$.

Dans le cas (3), posons $t \stackrel{\text{def}}{=} s[x := u_1]u_2 \cdots u_m$ et $u' \stackrel{\text{def}}{=} \lambda x_1, \dots, x_n. t$. On a $u \rightarrow u'$, donc $\nu(u) > \nu(u')$ (car $u \in SN!$), et ensuite $\nu(u') \geq \nu(t)$ puisque t est un sous-terme de u' , et que donc toute réduction dans t induit une réduction de même longueur dans u' . On n'a pas besoin de regarder les tailles des termes.

Dans le cas (4), posons $t \stackrel{\text{def}}{=} su_2 \cdots u_m$ et $u' \stackrel{\text{def}}{=} \lambda x_1, \dots, x_n. t$. Comme dans le cas précédent, $u \rightarrow u'$ (ici, parce que $x \notin \text{fv}(u)$, donc $u[x := u_1] = u$), donc $\nu(u) > \nu(u')$ (parce que $u \in SN$) et $\nu(u') \geq \nu(t)$ puisque t est un sous-terme de u' . On n'a pas besoin de regarder les tailles des termes.

Question 12 ■■■■ Montrer que $h(u) = \nu_p(u)$ pour tout $u \in SN$. La **Question 11** a montré qu'il existe une unique fonction $h: SN \rightarrow \mathbb{N}$ satisfaisant aux équations (2), (3) et (4). Il suffit donc de vérifier que ν_p est bien définie sur tout SN et que ν_p satisfait aux mêmes équations que h .

*D'abord, $\nu_p(u)$ est bien défini pour tout $u \in SN$ (et exactement pour ces termes-là, par la **Question 10**).*

(A) Si la forme de tête de u est une forme normale de tête $\lambda x_1, \dots, x_n. xu_1 \cdots u_m$, alors par définition de $\rightarrow_p$ les réductions dans $\rightarrow_p$ se passent toutes dans u_1 jusqu'à atteindre une forme normale, puis toutes dans u_2 , etc. Donc $\nu_p(u) = \sum_{i=1}^m \nu_p(u_i)$.

(B) Si u est un redex de tête $\lambda x_1, \dots, x_n. (\lambda x. s)u_1 \cdots u_m$ avec $m \geq 1$, alors il y a deux démonstrations possibles.

Démonstration 1. Par la **Question 7**, $\nu_p(u) = \nu_p((\lambda x. s)u_1 \cdots u_m)$. Or $\nu_p = \nu$ (**Question 9**) et par la **Question 6**, $\nu((\lambda x. s)u_1 \cdots u_m)$ vaut $\nu(s[x := u_1]u_2 \cdots u_m) + 1$ si x est libre dans s , et $\nu(su_2 \cdots u_m) + \nu(u_1) + 1$ sinon.

Si $x \in \text{fv}(s)$, ou bien si $x \notin \text{fv}(s)$ et u_1 n'est pas normal, on obtient la formule souhaitée car $\nu = \nu_p$.

Si $x \notin \text{fv}(s)$ mais u_1 est normal, on obtient la formule $\nu(su_2 \cdots u_m) + \nu(u_1) + 1$ à la place de la formule désirée. Mais $\nu(u_1) = 0$, et $s = s[x :=$

$u_1]$, donc $\nu(su_2 \cdots u_m) + \nu(u_1) + 1 = \nu(s[x := u_1]u_2 \cdots u_m) + 1 = \nu_p(s[x := u_1]u_2 \cdots u_m) + 1$, ce qui est la formule souhaitée.

Démonstration 2. Cette démonstration consiste essentiellement à rejouer les arguments de la **Question 9**. On considère deux sous-cas.

(a) Si $x \in \text{fv}(s)$ ou u_1 est normal, alors $u \rightarrow_p u'$ où $u' \stackrel{\text{def}}{=} \lambda x_1, \dots, x_n. t$ et $t \stackrel{\text{def}}{=} s[x := u_1]u_2 \cdots u_m$. Donc $\nu_p(u) = \nu_p(u') + 1$. Par la **Question 7**, $\nu_p(u') = \nu_p(t)$, donc $\nu_p(u) = \nu_p(s[x := u_1]u_2 \cdots u_m) + 1$.

(b) Si $x \notin \text{fv}(s)$ et u_1 n'est pas normal, alors les p -réductions dans u se passent d'abord dans u_1 ($\nu_p(u_1)$ étapes) jusqu'à atteindre une forme normale u'_1 . La $\rightarrow_p$ -réduction suivante est alors :

$$\lambda x_1, \dots, x_n. (\lambda x. u) u'_1 u_2 \cdots u_m \rightarrow_p \lambda x_1, \dots, x_n. u[x := u'_1] u_2 \cdots u_m,$$

Mais $u[x := u'_1] = u$, donc

$$\nu_p(u) = \nu_p(u_1) + 1 + \nu_p(\lambda x_1, \dots, x_n. uu_2 \cdots u_m).$$

On conclut parce que $\nu_p(\lambda x_1, \dots, x_n. uu_2 \cdots u_m) = \nu_p(uu_2 \cdots u_m)$ par la **Question 7**.

On cherche à estimer la vitesse de croissance de la fonction h en fonction de son argument.

On représente les λ -termes sous forme de chaînes de caractères de façon évidente. On admettra que le problème suivant, noté **SN**, est indécidable :

Entrée : un λ -terme u ;

Question : $u \in SN$?

On note p la fonction qui prend en entrée un λ -terme u et retourne en sortie l'unique réduit en une étape de u par $\rightarrow_p$ si u n'est pas normal, et un symbole spécial $\checkmark$, différent de tous les λ -termes, si u est normal. On admettra que p est calculable, autrement dit, qu'il existe une machine de Turing qui termine toujours et retourne $p(u)$ sur tout λ -terme u en entrée.

À partir de p , on définit une fonction F qui à tout couple (u, k) d'un λ -terme u et d'un entier $k \in \mathbb{N}$ associe la forme normale $u \downarrow$ de u si l'on a $u \rightarrow_p^* u \downarrow$ en k étapes ou moins, et sinon l'unique réduit de u par $\rightarrow_p$ en exactement k étapes ; autrement dit, $F(u, 0) \stackrel{\text{def}}{=} u$, $F(u, n+1)$ vaut u si $p(u) = \checkmark$, $F(p(u), n)$ sinon. Il est clair que F est calculable.

Question 13 ■■■■ Supposons une fonction (totale) calculable ℓ prenant un λ -terme u en entrée et retournant un entier $\ell(u)$, telle que $h(u) \leq \ell(u)$ pour tout $u \in SN$. La fonction c qui à tout λ -terme u associe 0 si $p(F(u, \ell(u))) = \checkmark$, 1 sinon, est calculable. Montrer que, sous ces hypothèses, **SN** serait décidable, et

en conclure que la fonction h n'est en fait majorée (sur SN) par aucune fonction calculable définie sur tous les λ -termes.

Si $u \in SN$, alors $h(u) \leq \ell(u)$, et alors $F(u, \ell(u))$ est la forme normale de u , donc $p(F(u, \ell(u))) = \checkmark$. Il s'ensuit que $c(u) = 0$.

*Si $u \notin SN$, alors par le théorème d'anti-standardisation (**Question 10**), la $\rightarrow_p$ -réduction partant de u est infinie. Donc $F(u, k)$ n'est pas normal, pour aucun $k \in \mathbb{N}$. En particulier, $F(u, \ell(u))$ n'est pas normal, donc $p(F(u, \ell(u))) \neq \checkmark$. Par conséquent, $c(u) = 1$.*

On a donc $c(u) = 0$ ssi $u \in SN$. Comme c est calculable, on peut décider si $u \in SN$.

Mais ceci contredit le fait que SN est indécidable. Donc notre hypothèse est fausse : h n'est majorée par aucune fonction calculable définie sur tous les λ -termes.

Une remarque pour finir. On peut utiliser la construction de la **Question 11** pour montrer que h est une fonction qui est non seulement bien définie sur SN , mais même calculable sur SN , au sens suivant : il existe une machine de Turing $\mathcal{M}$ qui, si on lui donne un λ -terme $u \in SN$ en entrée, termine en produisant en sortie la valeur de $h(u)$. Si on lui donne un λ -terme u non fortement normalisant en entrée, rien n'est demandé de $\mathcal{M}$, et elle peut parfaitement ne pas terminer sur u . La **Question 13** montre en particulier qu'on ne peut pas étendre h à une fonction qui serait calculable sur tous les λ -termes, et qu'il n'y a même pas de fonction calculable ℓ sur les λ -termes qui pourrait fournir une approximation supérieure $\ell(u)$ de $h(u)$ pour chaque $u \in SN$.

Tout ceci repose sur le fait que SN est indécidable, que nous avons admis. Une des démonstrations les plus simples de ce fait se trouve dans : Paweł Urzyczyn, *A simple proof of the undecidability of strong normalization*, Mathematical Structures in Computer Science 13(2003), pages 5–13.