Jean Goubault-Larrecq

λ-calcul

6. Le λ-calcul simplement typé

Aujourd'hui

$$\frac{}{\Gamma, x : F \vdash x : F}\,(Var)$$

$$\frac{\Gamma \vdash u : F_1 \Rightarrow F_2 \quad \Gamma \vdash v : F_1}{\Gamma \vdash uv : F_2}\,(App) \qquad \frac{\Gamma, y : F_1 \vdash u[x := y] : F_2 \quad (y \notin \mathrm{dom}\,\Gamma, y \notin \mathrm{fv}(u))}{\Gamma \vdash \lambda x \cdot u : F_1 \Rightarrow F_2}\,(Abs)$$

- Systèmes de types
- Le système des **types simples**:
- **Autoréduction** (subject reduction)
- **Normalisation forte**
- Nouveau poly:
  `http://www.lsv.fr/~goubault/Lambda/types.pdf`

Systèmes de types

Système de types

- On souhaite **restreindre** les λ-termes à ceux qui sont **bien typés**, typiquement pour éviter des bizarreries
- On commence par le plus simple:
  le système des **types simples**
- On verra que
  tout λ-terme simplement typé **normalise fortement** (!)
- … et qu'il y a un lien fort avec la **logique propositionnelle intuitionniste (minimale)**

Types simples

- Syntaxe des **types simples**:
  $F, G, H, \ldots ::= b$ types de base (ex: `int`, `string`, etc.)
  $\mid F \Rightarrow G$ types de fonctions
  (usuellement noté $F \to G$)

- Règles de parenthésage:
  $$F \Rightarrow G \Rightarrow H \;=\; F \Rightarrow (G \Rightarrow H)$$
  … comme en Caml

Jugements de typage

- Un **jugement** de typage est un morceau de syntaxe de la forme:

$$\underbrace{x_1 : F_1, \ldots, x_n : F_n}_{} \vdash u : F$$

Contexte de typage Γ

= ensemble fini de **liaisons** $x_i : F_i$,

les x_i étant distinctes 2 à 2

- On va se donner des **règles** de typage permettant de **dériver** de tels jugements de typage

Le système des types simples

$$\frac{}{\Gamma, x : F \vdash x : F}\ (Var)$$

$$\frac{\Gamma \vdash u : F_1 \Rightarrow F_2 \quad \Gamma \vdash v : F_1}{\Gamma \vdash uv : F_2}\ (App) \qquad \frac{\boxed{\Gamma, x : F_1} \vdash u : F_2}{\Gamma \vdash \lambda x \cdot u : F_1 \Rightarrow F_2}\ (Abs)$$

- **Note**: Γ, Δ dénote l'union de deux contextes Γ et Δ
  et toute liaison $x : F_1$ est implicitement promue
  en contexte de typage

- **Problème** (formel): Γ, $x : F_1$ n'a de sens que si x n'apparaît pas déjà dans Γ

- **Solution** (informelle): on raisonne à α-équivalence près

Le système des types simples, formellement

$$\frac{}{\Gamma, x : F \vdash x : F}\,(Var)$$

$$\frac{\Gamma \vdash u : F_1 \Rightarrow F_2 \quad \Gamma \vdash v : F_1}{\Gamma \vdash uv : F_2}\,(App) \qquad \frac{\Gamma, y : F_1 \vdash u[x := y] : F_2 \quad (y \notin \operatorname{dom}\Gamma, y \notin \operatorname{fv}(u))}{\Gamma \vdash \lambda x \cdot u : F_1 \Rightarrow F_2}\,(Abs)$$

- C'est la définition du poly, qui inclut la compatibilité à l'α-équivalence dans la règle (Abs)
- mais c'est **très** formel,
  et on gardera
  les règles précédentes

$$\frac{}{\Gamma, x : F \vdash x : F}\,(Var)$$

$$\frac{\Gamma \vdash u : F_1 \Rightarrow F_2 \quad \Gamma \vdash v : F_1}{\Gamma \vdash uv : F_2}\,(App)$$

$$\frac{\Gamma, x : F_1 \vdash u : F_2}{\Gamma \vdash \lambda x \cdot u : F_1 \Rightarrow F_2}\,(Abs)$$

Quelques exemples

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, x : F \vdash x : F}\;(\mathit{Var})}{\Gamma \vdash \lambda x\,.\,x : F \to F}\;(\mathit{Abs})$$

Note: une **infinité** de typages (ne dites pas « **le** type de u »!)

$$\dfrac{}{\Gamma, x : F \vdash x : F}\;(Var)$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash u : F_1 \Rightarrow F_2 \quad \Gamma \vdash v : F_1}{\Gamma \vdash uv : F_2}\;(App)$$

$$\dfrac{\Gamma, x : F_1 \vdash u : F_2}{\Gamma \vdash \lambda x \cdot u : F_1 \Rightarrow F_2}\;(Abs)$$

… à l'opposé, certains termes n'ont **pas** de typage du tout: supposons que xx ait un typage, autrement dit qu'il existe une dérivation d'un jugement $\Gamma \vdash xx : F$.
Nécessairement, cette dérivation est de la forme:

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash x : G \to F}\;(\mathit{Var}) \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash x : G}\;(\mathit{Var})}{\Gamma \vdash xx : F}\;(\mathit{App})$$

donc $x : G \to F$ est dans Γ

et $x : G$ est dans Γ

donc $G \to F = G$:

impossible

Autoréduction

Autoréduction

- **Thm**. Si $\Gamma \vdash u : F$ est dérivable et $u \to^* v$
  alors $\Gamma \vdash v : F$ est dérivable.
- Voir lemme 1, page 4
  Il suffit de le montrer lorsque $u \to v$ (une seule étape)
  (et fonctionne aussi pour η)
- Idée: on part d'une **dérivation** π de $\Gamma \vdash u : F$,
  on **construit** une autre dérivation de $\Gamma \vdash v : F$

Autoréduction

- **Thm**. Si $\Gamma \vdash u : F$ est dérivable et $u \to v$
  alors $\Gamma \vdash v : F$ est dérivable.

$$\frac{}{\Gamma, x : F \vdash x : F}\,(Var)$$

$$\frac{\Gamma \vdash u : F_1 \Rightarrow F_2 \quad \Gamma \vdash v : F_1}{\Gamma \vdash uv : F_2}\,(App)$$

$$\frac{\Gamma, x : F_1 \vdash u : F_2}{\Gamma \vdash \lambda x \cdot u : F_1 \Rightarrow F_2}\,(Abs)$$

- Idée: on part d'une **dérivation** π de $\Gamma \vdash u : F$,
  on **construit** une autre dérivation de $\Gamma \vdash v : F$

- Ça fonctionne par récurrence sur (la taille de) π.
  Essayez de le faire par vous-même, ce n'est pas difficile.

Autoréduction

$$\frac{}{\Gamma, x : F \vdash x : F}\,(Var)$$

$$\frac{\Gamma \vdash u : F_1 \Rightarrow F_2 \quad \Gamma \vdash v : F_1}{\Gamma \vdash uv : F_2}\,(App)$$

$$\frac{\Gamma, x : F_1 \vdash u : F_2}{\Gamma \vdash \lambda x \cdot u : F_1 \Rightarrow F_2}\,(Abs)$$

- Qu'avez-vous fait quand *u* est lui-même le beta-redex contracté?
- C'est le seul cas intéressant.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma, x : F_1 \vdash s : F\end{array}}{\Gamma \vdash \lambda x \cdot s : F_1 \Rightarrow F}\,(Abs) \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \Gamma \vdash t : F_1\end{array}}{\Gamma \vdash (\lambda x \cdot s)t : F}\,(App)$$

Retour à la preuve d'autoréduction

$$\frac{}{\Gamma, x : F \vdash x : F}\,(Var)$$

$$\frac{\Gamma \vdash u : F_1 \Rightarrow F_2 \quad \Gamma \vdash v : F_1}{\Gamma \vdash uv : F_2}\,(App)$$

$$\frac{\Gamma, x : F_1 \vdash u : F_2}{\Gamma \vdash \lambda x \cdot u : F_1 \Rightarrow F_2}\,(Abs)$$

- Dans le cas important d'un redex, π dérive $\Gamma \vdash (\lambda x.s)t : F$ à partir de dérivations
  $\pi_1 : \Gamma, x{:}F_1 \vdash s : F$ et $\pi_2 : \Gamma \vdash t : F_1$

$$\frac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi_1\\ \Gamma, x : F_1 \vdash s : F\end{array}}{\Gamma \vdash \lambda x \cdot s : F_1 \Rightarrow F}\,(Abs) \qquad \begin{array}{c}\vdots\ \pi_2\\ \Gamma \vdash t : F_1\end{array}}{\Gamma \vdash (\lambda x \cdot s)t : F}\,(App)$$

- Sous ces hypothèses, on fabrique une dérivation de $\Gamma \vdash s[x{:=}t] : F$
- Par récurrence sur π_1: exercice.
  (« On remplace tout axiome $\Gamma, x{:}F_1 \vdash x{:}F_1$ dans π_1 par $\pi_2 : \Gamma \vdash t : F_1$ »)

Petit souci: quand on remonte dans π_1, le contexte Γ change

Retour à la preuve d'autoréduction

$$\frac{}{\Gamma, x : F \vdash x : F}\,(Var)$$

$$\frac{\Gamma \vdash u : F_1 \Rightarrow F_2 \quad \Gamma \vdash v : F_1}{\Gamma \vdash uv : F_2}\,(App)$$

$$\frac{\Gamma, x : F_1 \vdash u : F_2}{\Gamma \vdash \lambda x \cdot u : F_1 \Rightarrow F_2}\,(Abs)$$

- Une solution possible: montrer que si l'on a des dérivations
  $\pi_1 : \Gamma, x{:}F\underline{, \Delta} \vdash s : G$ et $\pi_2 : \Gamma \vdash t : F$
  alors on peut dériver $\Gamma\underline{, \Delta} \vdash s[x{:=}t] : G$
  pour tout contexte Δ tel que $\Gamma, x{:}F, \Delta$ ait un sens.
- Par récurrence sur π_1, et ça passe, mais pour la règle (*Var*) on a besoin d'un…

Lemme d'affaiblissement

$$\frac{}{\Gamma, x : F \vdash x : F}\,(Var)$$

$$\frac{\Gamma \vdash u : F_1 \Rightarrow F_2 \quad \Gamma \vdash v : F_1}{\Gamma \vdash uv : F_2}\,(App)$$

$$\frac{\Gamma, x : F_1 \vdash u : F_2}{\Gamma \vdash \lambda x \cdot u : F_1 \Rightarrow F_2}\,(Abs)$$

- **Lemme (affaiblissement).**
  Si $\Gamma \vdash v : F$ est dérivable,
  pour tout Δ tel que Γ,Δ a un sens, alors
  le jugement $\Gamma,\Delta \vdash v : F$ est aussi dérivable.
- Voir lemme 2, page 5.
- Exercice: faites-en une preuve formelle, et traitez correctement le alpha-renommage.

Retour à la preuve d'autoréduction

$$\frac{}{\Gamma, x : F \vdash x : F}\,(Var)$$

$$\frac{\Gamma \vdash u : F_1 \Rightarrow F_2 \quad \Gamma \vdash v : F_1}{\Gamma \vdash uv : F_2}\,(App)$$

$$\frac{\Gamma, x : F_1 \vdash u : F_2}{\Gamma \vdash \lambda x \cdot u : F_1 \Rightarrow F_2}\,(Abs)$$

- Si l'on a des dérivations
  $\pi_1 : \Gamma, x{:}F\underline{, \Delta} \vdash s : G$ et $\pi_2 : \Gamma \vdash t : F$
  alors on peut dériver $\Gamma\underline{, \Delta} \vdash s[x{:=}t] : G$
- Dans le cas où π_1 finit par (*Abs*), la preuve passe toute seule maintenant
- Pour (*Var*)…

Retour à la preuve d'autoréduction

$$\frac{}{\Gamma, x : F \vdash x : F}\,(Var)$$

$$\frac{\Gamma \vdash u : F_1 \Rightarrow F_2 \quad \Gamma \vdash v : F_1}{\Gamma \vdash uv : F_2}\,(App)$$

$$\frac{\Gamma, x : F_1 \vdash u : F_2}{\Gamma \vdash \lambda x \cdot u : F_1 \Rightarrow F_2}\,(Abs)$$

- Si l'on a des dérivations
  $\pi_1 : \Gamma, x{:}F\underline{, \Delta} \vdash s : G$ et $\pi_2 : \Gamma \vdash t : F$
  alors on peut dériver $\Gamma\underline{, \Delta} \vdash s[x{:=}t] : G$
- Pour (*Var*), soit $s{=}x$, $s[x{:=}t]{=}t$, $F{=}G$, et
  on obtient $\Gamma\underline{, \Delta} \vdash t : G$ par affaiblissement à partir de π_2
- soit $s{=}y{\neq}x$, π_1 dérive $\Gamma, x{:}F, \Delta \vdash y : G$ par (*Var*) et
  on dérive $\Gamma, \Delta \vdash y : G$ par (*Var*) aussi.

La correspondance de Curry-Howard

Curry-Howard

- Ah bon, je ne vous avais pas dit que je vous en parlerais dans le préambule? :-)

Curry-Howard

- La légende dit que H.B. Curry se serait aperçu qu'il écrivait $F \Rightarrow G$ pour:
- … le type des fonctions de F vers G
- … et aussi la formule « F implique G »
- Serait-ce une coïncidence? *[Je ne crois pas…]*

Curry-Howard

$$\frac{}{\Gamma, x : F \vdash x : F}\ (Var)$$

$$\frac{\Gamma \vdash u : F_1 \Rightarrow F_2 \quad \Gamma \vdash v : F_1}{\Gamma \vdash uv : F_2}\ (App) \qquad \frac{\Gamma,\ x : F_1 \vdash u : F_2}{\Gamma \vdash \lambda x \cdot u : F_1 \Rightarrow F_2}\ (Abs)$$

- Système de typage

  (je prends la version simplifiée)

Curry-Howard

$$\frac{}{\Gamma, \quad F \vdash \quad F}\ (Var)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \quad F_1 \Rightarrow F_2 \quad \Gamma \vdash \quad F_1}{\Gamma \vdash \quad F_2}\ (App) \qquad \frac{\Gamma, \quad F_1 \vdash \quad F_2}{\Gamma \vdash \quad F_1 \Rightarrow F_2}\ (Abs)$$

- ~~Système de typage~~ Système de **déduction naturelle** pour une logique
- (la logique propositionnelle intuitionniste minimale)

Curry-Howard

$$\frac{}{\Gamma, F \vdash F}\ (\mathrm{Ax})$$

$$\frac{\Gamma \vdash F_1 \Rightarrow F_2 \quad \Gamma \vdash F_1}{} \qquad \frac{\Gamma, F_1 \vdash F_2}{F_1 \Rightarrow F_2}\ (Abs)$$

Sous les hypothèses Γ et *F*, je peux affirmer *F*

- ~~Système de typage~~ Système de **déduction naturelle** pour une logique
- (la logique propositionnelle intuitionniste minimale)

Curry-Howard

$$\frac{}{\Gamma, \quad F \vdash \quad F}\ (\mathrm{Ax})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \quad F_1 \Rightarrow F_2 \quad \Gamma \vdash \quad F_1}{\Gamma \vdash \quad F_2}\ (\Rightarrow\mathrm{E}) \qquad \frac{\Gamma, \quad F_1 \vdash \quad F_2}{\Gamma \vdash \quad F_1 \Rightarrow F_2}\ (Abs)$$

Sans varier les hypothèses Γ, si je peux démontrer $F_1 \Rightarrow F_2$ et F_1, je peux en déduire F_2 (**élimination** de $\Rightarrow$: on élimine un $\Rightarrow$ de $F_1 \Rightarrow F_2$ pour obtenir F_2)

- ~~Sy~~ … **éduction naturelle** po…
- (la … tionniste minimale)

Curry-Howard

$$\frac{}{\Gamma, F \vdash F}\ (\mathrm{Ax})$$

$$\frac{\Gamma \vdash F_1 \Rightarrow F_2 \quad \Gamma \vdash F_1}{\Gamma \vdash F_2}\ (\Rightarrow\mathrm{E}) \qquad \frac{\Gamma, F_1 \vdash F_2}{\Gamma \vdash F_1 \Rightarrow F_2}\ (\Rightarrow\mathrm{I})$$

- ~~Système de typage~~ Système de **déduction naturell**
pour une logiqu
- (la logique prop

Pour démontrer $F_1 \Rightarrow F_2$ (en bas),
on démontre F_2
sous l'hypothèse supplémentaire F_1
(**introduction** de $\Rightarrow$)

Curry-Howard

$$\frac{}{\Gamma,\ F \vdash F}\ \text{(Ax)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash F_1 \Rightarrow F_2 \quad \Gamma \vdash F_1}{\Gamma \vdash F_2}\ (\Rightarrow\text{E}) \qquad \frac{\Gamma,\ F_1 \vdash F_2}{\Gamma \vdash F_1 \Rightarrow F_2}\ (\Rightarrow\text{I})$$

- Ceci est ce qu'on appelle le système de **déduction naturelle** (Gentzen 1934; Prawitz 1965)
- pour une logique quand même très peu expressive! juste l'implication comme connecteur logique… (on fera mieux les prochaines fois)

Curry-Howard

$$\dfrac{}{\Gamma, \quad F \vdash \quad F}\ (\mathrm{Ax})$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \quad F_1 \Rightarrow F_2 \qquad \Gamma \vdash \quad F_1}{\Gamma \vdash \quad F_2}\ (\Rightarrow\mathrm{E}) \qquad \dfrac{\Gamma, \quad F_1 \vdash \quad F_2}{\Gamma \vdash \quad F_1 \Rightarrow F_2}\ (\Rightarrow\mathrm{I})$$

- Réciproquement, à partir d'une preuve de $\Gamma \vdash F$ dans ce système, on peut reconstruire un terme u tel que $\Gamma \vdash u : F$ soit dérivable
  (décorer les formules de Γ de variables, et suivre la forme des règles)

Curry-Howard

$$\frac{}{\Gamma, x\colon F \vdash x\colon F}\ (\mathrm{Ax})$$

$$\frac{\Gamma \vdash u\colon F_1 \Rightarrow F_2 \quad \Gamma \vdash v\colon F_1}{\Gamma \vdash uv\colon F_2}\ (\Rightarrow\mathrm{E}) \qquad \frac{\Gamma, x\colon F_1 \vdash u\colon F_2}{\Gamma \vdash \lambda x.u\colon F_1 \Rightarrow F_2}\ (\Rightarrow\mathrm{I})$$

- Réciproquement, à partir d'une preuve de $\Gamma \vdash F$ dans ce système, on peut reconstruire un terme u tel que $\Gamma \vdash u : F$ soit dérivable
  (décorer les formules de Γ de variables, et suivre la forme des règles)

Curry-Howard

$$\frac{}{\Gamma, x\colon F \vdash x\colon F}\ (\mathrm{Ax})$$

$$\frac{\Gamma \vdash u\colon F_1 \Rightarrow F_2 \qquad \Gamma \vdash v\colon F_1}{\Gamma \vdash uv\colon F_2}\ (\Rightarrow\mathrm{E}) \qquad \frac{\Gamma, x\colon F_1 \vdash u\colon F_2}{\Gamma \vdash \lambda x.u\colon F_1 \Rightarrow F_2}\ (\Rightarrow\mathrm{I})$$

- Réciproquement, à partir d'une preuve de $\Gamma \vdash F$ dans ce système, on peut reconstruire un terme u tel que $\Gamma \vdash u : F$ soit dérivable: un terme de preuve
  (décorer les formules de Γ de variables, et suivre la forme des règles)
- Attention, u n'est pas unique
  (Ex: montrer que $F, F \vdash F$ a deux termes de preuve)

Normalisation forte

Normalisation forte

- **Normalisation forte**:
  si $\Gamma \vdash u : F$ dérivable alors u est fortement normalisable.
- S'il y a un résultat mathématique non trivial aujourd'hui, c'est celui-ci!
- On va le démontrer pour β, le poly traite aussi de η

Normalisation forte

- **Normalisation forte**:
  si $\Gamma \vdash u : F$ dérivable alors u est fortement normalisable.
- Faites l'expérience suivante:
  posez SN $= \{u \mid u$ est fortement normalisable$\}$
  et essayez de démontrer le théorème ci-dessus
  par récurrence sur (la taille de) u
- Vous devriez buter sur le cas des applications:

$$uv \to^* (\lambda x.s)t \to s[x{:=}t] \to^* \ldots$$

Normalisation forte

- **Normalisation forte**:
  si $\Gamma \vdash u : F$ dérivable alors u est fortement normalisable.
- Comme pour les développements finis, on peut espérer montrer que $u\theta \in \mathrm{SN}$ **pour toute substitution** $\theta \in \underline{\mathrm{SN}}$ (i.e., qui envoie toute variable vers un terme de SN)
- Vous devriez **encore** buter sur le cas des applications
$$(uv)\theta \to^* (\lambda x.s)t \to s[x{:=}t] \to^* \ldots$$

Normalisation forte

- **Normalisation forte**:
  si $\Gamma \vdash u : F$ dérivable alors u est fortement normalisable.
- On ne peut pas y arriver comme ça,
  pour la simple raison qu'aucune de ces techniques de preuve n'utilise **le typage**
  (sans typage, il y a des termes non fortement normalisables)

Normalisation forte

- **Normalisation forte**:
  si $\Gamma \vdash u : F$ dérivable alors u est fortement normalisable.
- Solution (Tait, années 60): on va démontrer que u vérifie une propriété RED_F
  — **plus forte** que (impliquant) la normalisation forte,
  — et **dépendant** du type F.

- L'intuition est difficile à expliquer…
  je vais faire deux tentatives, et je compte
  sur vous pour potasser le poly (ou ces transparents)!

https://i1.rgstatic.net/ii/profile.image/279214973571093-1443581445569_Q512/William-Tait-3.jpg

Réductibilité: intuition #1

- Le problème était l'application uv. On va définir RED_F pour rendre ce cas facile (et même trivial):
on pose $\mathrm{RED}_{F \Rightarrow G} = \{u \mid \text{pour tout } v \in \mathrm{RED}_F,\ uv \in \mathrm{RED}_G\}$
- et on montre que si $\Gamma \vdash u : F$ dérivable alors $u \in \mathrm{RED}_F$.
- (en fait que $u\theta \in \mathrm{RED}_F$ pour toute substitution $\theta \in \underline{\mathrm{RED}}_\Gamma$; je définirai $\underline{\mathrm{RED}}_\Gamma$ plus tard)
- Si vous n'avez pas fait l'expérience d'il y a 4 transparents, faites-là! Essayez de voir en quoi ceci trivialise le cas problématique.

Réductibilité

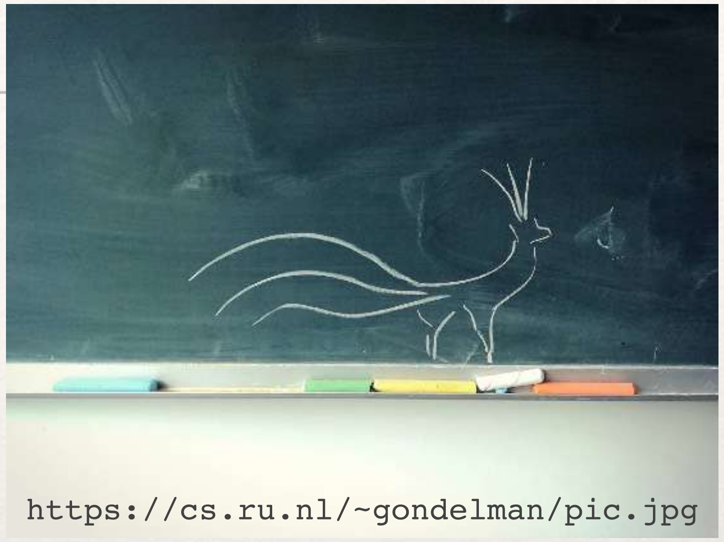
- Il nous reste encore pas mal de travail.
- Par exemple, il va falloir que nous montrions:
  (CR1) tout $u \in \mathrm{RED}_F$ est dans SN
  (il faut bien que RED_F soit une généralisation de SN!)
- et ceci sera montré par récurrence sur le type F
- ainsi que deux autres propriétés (CR2) et (CR3)

Réductibilité: intuition #2

- Il y a quelques années:
  Un élève:
  « Oui, mais quelle est l'intuition? »
  Moi:
  « *on ne la comprend qu'une fois qu'on a digéré la preuve…* ☹️ »

- (Et je pense: *il y a bien une explication, mais elle est stratosphérique*.)

Réductibilité: intuition #2



- Un peu plus récemment, un autre élève, Lev (Léon) Gondelman:
  « Il n'y a vraiment pas moyen d'expliquer ça mieux? »
- Moi: « *Bon, voici l'explication stratosphérique…* »
- Après l'explication, LG me dit:
  « ça me semble beaucoup plus clair comme ça »
- Ah bon? 😕 Bon, alors, voici.

L'idée stratosphérique

- Pour chaque type (=formule) F,
  on va définir une **valeur de vérité** RED_F,
  ou bien $[\![F]\!]$ si vous préférez
- Ici, une valeur de vérité sera un **ensemble de termes** (vérifiant (CR1)–(CR3)), pas juste un booléen
- Note: Gödel avait déjà montré dans les années 1930 que toute sémantique complète de la logique intuitionniste devait avoir une infinité de valeurs de vérité…

L'idée stratosphérique

- Pour chaque type (=formule) F,
  on va définir une **valeur de vérité** RED_F, ou bien $[\![F]\!]$ si vous préférez
- Ici, une valeur de vérité sera donc un **ensemble de termes** (vérifiant (CR1)–(CR3)), pas juste un booléen
- de sorte que tout terme de type F sera dans $[\![F]\!]$
  (j'ignore les contextes pour l'instant…)
- et $[\![F]\!] \subseteq \mathrm{SN}$ (c'est (CR1))

Interprétation de Brouwer-Heyting-Kolmogorov

http://www.bibmath.net/bios/images/brouwer.jpg

- L'idée fondamentale de Brouwer:
  « la valeur de vérité $[\![F]\!]$ de F est
  l'ensemble de ses preuves »
  (attention: c'est l'idée, mais pas tout à fait ce qu'on va faire; au lieu de preuves, on va prendre des λ-termes non typés, c'est plus simple)
- Une preuve de $F \Rightarrow G$ est un programme u qui prend en entrée des preuves de F et retourne des preuves de G
- Formellement, $[\![F \Rightarrow G]\!] = \{u \mid \forall v \in [\![F]\!], uv \in [\![G]\!]\}$
  Comparer à: $\mathrm{RED}_{F \Rightarrow G} = \{u \mid \forall v \in \mathrm{RED}_F, uv \in \mathrm{RED}_G\}$

Les propriétés (CR1)–(CR3)

- Une **valeur de vérité** (nom officiel: un **candidat de réductibilité**) est un ensemble S de λ-termes tel que:
- (CR1) $S \subseteq \mathrm{SN}$ (rappel: on veut que tout $u \in \mathrm{RED}_F$ soit dans SN)
- (CR2) pour tout $u \in S$, si $u \to u'$ alors $u' \in S$
- (CR3) pour tout u dont tous les réduits en une étape sont dans S, et qui est **neutre**, u est lui-même dans S
  (la condition la plus mystérieuse… et la plus utile dans la suite!)

Les propriétés (CR1)–(CR3)

- En abrégé:
- (CR1) $S \subseteq \mathrm{SN}$
- (CR2) si $u \in S \to u'$ alors $u' \in S$ *(on suit les réductions en avant)*
- (CR3) si
$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & u \text{ neutre} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ u' & u' & u' \end{tikzcd} \quad \boxed{u' \ u' \ u'} \subseteq S$$
alors $u \in S$ *(réductions en arrière)*

où u **neutre** ssi pas une λ-abstraction.

Les propriétés (CR1)–(CR3)

- En abrégé:
- (CR1) $S \subseteq \mathrm{SN}$
- (CR2) si $u \in S \to u'$ alors $u' \in S$ *(on suit les réductions en avant)*
- (CR3) si
$$\begin{tikzcd} & u \text{ neutre} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ u' & u' & u' \end{tikzcd} \subseteq S$$
alors $u \in S$ *(réductions en arrière)*
- En particulier (car toute variable est neutre et n'a aucun réduit):
  toute variable est dans tout candidat de réductibilité S

La sémantique de $\Rightarrow$

(CR1) $S \subseteq \mathrm{SN}$

(CR2) si $u \in S \to u'$ alors $u' \in S$

(CR3) si
$$\begin{tikzcd} & u \text{ neutre} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ u' & u' & u' \end{tikzcd} \subseteq S$$
alors $u \in S$

- On pose $S \Rightarrow S' = \{u \mid \forall\, v \in S,\ uv \in S'\}$
  (de sorte que $[\![F \Rightarrow G]\!] = [\![F]\!] \Rightarrow [\![G]\!]$, i.e. $\mathrm{RED}_{F\Rightarrow G} = \mathrm{RED}_F \Rightarrow \mathrm{RED}_G$)

- Montrons que:

- **Lemme A.** (C'est en gros le bas de la p.7, haut p.8 du poly)
  Si S et S' sont des candidats de réductibilité,
  alors $S \Rightarrow S'$ aussi.

- Preuve dans les transparents suivants (ça va prendre du temps!)

$S \Rightarrow S'$ vérifie (CR1)

(si S et S' sont des candidats)

(CR1) $S \subseteq \mathrm{SN}$

(CR2) si $u \in S \to u'$ alors $u' \in S$

(CR3) si $\begin{array}{c} u \text{ neutre} \\ \swarrow \downarrow \searrow \\ \boxed{u' \; u' \; u'} \subseteq S \end{array}$ alors $u \in S$

$S \Rightarrow S' = \{u \mid \forall\, v \in S,\, uv \in S'\}$

- Soit $u \in S \Rightarrow S'$

(à remplir)

- On veut montrer $u \in \mathrm{SN}$.

$S \Rightarrow S$'vérifie (CR1)

(si S et S' sont des candidats)

(CR1) $S \subseteq \mathrm{SN}$

(CR2) si $u \in S \to u'$ alors $u' \in S$

(CR3) si
$$\begin{tikzcd} & u \text{ neutre} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ u' & u' & u' \end{tikzcd} \subseteq S$$
alors $u \in S$

$S \Rightarrow S' = \{u \mid \forall\, v \in S,\, uv \in S'\}$

- Soit $u \in S \Rightarrow S'$
- On choisit un élément v de S.

(à remplir, mais on progresse)

- … et on montre que $uv \in \mathrm{SN}$
- Toute réduction infinie dans u donnerait une réduction infinie dans uv: impossible
- Donc $u \in \mathrm{SN}$.

$S \Rightarrow S$'vérifie (CR1)

(si S et S' sont des candidats)

(CR1) $S \subseteq \mathrm{SN}$

(CR2) si $u \in S \rightarrow u'$ alors $u' \in S$

(CR3) si
$$\begin{tikzcd} & u \text{ neutre} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ u' & u' & u' \end{tikzcd} \subseteq S$$
alors $u \in S$

$S \Rightarrow S' = \{u \mid \forall\, v \in S,\ uv \in S'\}$

- Soit $u \in S \Rightarrow S'$
- On choisit un élément v de S.
- Par déf. de $S \Rightarrow S'$, uv est dans S'
- Or S' est un candidat, donc vérifie (CR1), i.e., $S' \subseteq \mathrm{SN}$
- Donc $uv \in \mathrm{SN}$
- Toute réduction infinie dans u donnerait une réduction infinie dans uv: impossible
- Donc $u \in \mathrm{SN}$.

$S \Rightarrow S'$ vérifie (CR1)

(si S et S' sont des candidats)

(CR1) $S \subseteq \mathrm{SN}$

(CR2) si $u \in S \to u'$ alors $u' \in S$

(CR3) si u neutre, $\{u' \mid u \to u'\} \subseteq S$ alors $u \in S$

$S \Rightarrow S' = \{u \mid \forall\, v \in S,\ uv \in S'\}$

- Soit $u \in S \Rightarrow S'$
- On choisit un élément v de S.
- Par déf. de $S \Rightarrow S'$, uv est dans S'
- Or S' est un candidat, donc vérifi
- Donc $uv \in \mathrm{SN}$
- Toute réduction inf onnerait une réduction infinie dans uv: impossible
- Donc $u \in \mathrm{SN}$.

Cette démonstration est buggée!
Ou est l'erreur?

$S \Rightarrow S'$ vérifie (CR1)

(si S et S' sont des candidats)

(CR1) $S \subseteq \mathrm{SN}$

(CR2) si $u \in S \to u'$ alors $u' \in S$

(CR3) si u neutre, $\{u' \mid u \to u'\} \subseteq S$ alors $u \in S$

$S \Rightarrow S' = \{u \mid \forall\, v \in S, uv \in S'\}$

- Soit $u \in S \Rightarrow S'$
- On choisit un élément v de S.
- Par déf. de $S \Rightarrow S'$, uv est dans S'
- Or S' est un candidat, donc $S' \subseteq \mathrm{SN}$
- Donc $uv \in \mathrm{SN}$
- Toute réduct… dans uv: imp…
- Donc $u \in \mathrm{SN}$

Pourquoi un tel v existe-t-il-donc?

Grâce au fait que S satisfait (CR3), donc contient toutes les variables. On peut donc prendre $v =$ une variable.

$S \Rightarrow S'$ vérifie (CR2)

(si S et S' sont des candidats)

(CR1) $S \subseteq \mathrm{SN}$

(CR2) si $u \in S \to u'$ alors $u' \in S$

(CR3) si u neutre $\begin{array}{c} \swarrow \downarrow \searrow \\ u' \; u' \; u' \end{array} \subseteq S$ alors $u \in S$

$S \Rightarrow S' = \{u \mid \forall\, v \in S,\, uv \in S'\}$

- Soit $u \in S \Rightarrow S'$, $u \to u'$
- (à remplir)
- On veut montrer $u' \in S \Rightarrow S'$.

$S \Rightarrow S'$ vérifie (CR2)

(si S et S' sont des candidats)

(CR1) $S \subseteq SN$

(CR2) si $u \in S \to u'$ alors $u' \in S$

(CR3) si u neutre $\to u' \subseteq S$ alors $u \in S$

$S \Rightarrow S' = \{u \mid \forall v \in S, uv \in S'\}$

- Soit $u \in S \Rightarrow S'$, $u \to u'$
- Soit v quelconque $\in S$.

(à remplir, mais on progresse)

- On doit montrer $u'v \in S'$
- Comme v est arbitraire, $u' \in S \Rightarrow S'$, par déf. de $S \Rightarrow S'$.

$S \Rightarrow S'$ vérifie (CR2)

(si S et S' sont des candidats)

(CR1) $S \subseteq \mathrm{SN}$

(CR2) si $u \in S \to u'$ alors $u' \in S$

(CR3) si u neutre $\left\{ u' \mid u \to u' \right\} \subseteq S$ alors $u \in S$

$S \Rightarrow S' = \{u \mid \forall\, v \in S, uv \in S'\}$

- Soit $u \in S \Rightarrow S'$, $u \to u'$
- Soit v quelconque $\in S$.
- Par déf. de $S \Rightarrow S'$, uv est dans S'
- Or $uv \to u'v$
- Comme S' vérifie (CR2),
- $u'v \in S'$
- Comme v est arbitraire, $u' \in S \Rightarrow S'$, par déf. de $S \Rightarrow S'$.

$S \Rightarrow S'$ vérifie (CR3)

(si S et S' sont des candidats)

(CR1) $S \subseteq \mathrm{SN}$

(CR2) si $u \in S \to u'$ alors $u' \in S$

(CR3) si u neutre $\begin{array}{c} u \\ \swarrow \ \downarrow \ \searrow \\ u' \quad u' \quad u' \end{array} \subseteq S$ alors $u \in S$

$S \Rightarrow S' = \{u \mid \forall\, v \in S,\ uv \in S'\}$

- Ça, c'est la partie la plus compliquée
- Je vais vous expliquer ça en plusieurs étapes.

$S \Rightarrow S'$ vérifie (CR3)

(si S et S' sont des candidats)

(CR1) $S \subseteq \mathrm{SN}$

(CR2) si $u \in S \to u'$ alors $u' \in S$

(CR3) si
$$\begin{tikzcd} & u \text{ neutre} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ u' & u' & u' \end{tikzcd} \subseteq S$$
alors $u \in S$

$S \Rightarrow S' = \{u \mid \forall v \in S, uv \in S'\}$

- Soit
$$\begin{tikzcd} & u \text{ neutre} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ u' & u' & u' \end{tikzcd} \subseteq S \Rightarrow S'$$

(à remplir)

- Montrons que $u \in S \Rightarrow S'$.

$S \Rightarrow S'$ vérifie (CR3)

(si S et S' sont des candidats)

(CR1) $S \subseteq \mathrm{SN}$

(CR2) si $u \in S \to u'$ alors $u' \in S$

(CR3) si u neutre $\to u'\ u'\ u' \subseteq S$ alors $u \in S$

$S \Rightarrow S' = \{u \mid \forall\, v \in S,\ uv \in S'\}$

- Soit u neutre, $u \to u'\ u'\ u' \subseteq S \Rightarrow S'$ et v arbitraire $\in S$
- Montrons que $uv \in S'$
- (à remplir, mais on progresse)
- Comme v arbitraire, $u \in S \Rightarrow S'$, par déf. de $S \Rightarrow S'$.

$S \Rightarrow S'$ vérifie (CR3)

(si S et S' sont des candidats)

(CR1) $S \subseteq \mathrm{SN}$

(CR2) si $u \in S \to u'$ alors $u' \in S$

(CR3) si u neutre $\to u', u', u' \subseteq S$ alors $u \in S$

$S \Rightarrow S' = \{u \mid \forall\, v \in S, uv \in S'\}$

- Soit u neutre $\to u', u', u' \subseteq S \Rightarrow S'$ et v arbitraire $\in S$
- Montrons que $uv \in S'$: comme uv est neutre (pas une λ), et que S' vérifie (CR3), on regarde les réduits en une étape de uv;

  si tous sont dans S', alors

  (on garde espoir!)
- … $uv \in S'$
- Comme v arbitraire, $u \in S \Rightarrow S'$, par déf. de $S \Rightarrow S'$.

$S \Rightarrow S'$ vérifie (CR3)

(si S et S' sont des candidats)

(CR1) $S \subseteq SN$

(CR2) si $u \in S \to u'$ alors $u' \in S$

(CR3) si $\begin{tikzcd}[column sep=small] & u \text{ neutre} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ u' & u' & u' \end{tikzcd} \subseteq S$ alors $u \in S$

$S \Rightarrow S' = \{u \mid \forall\, v \in S, uv \in S'\}$

- Soit $\begin{tikzcd}[column sep=small] & u \text{ neutre} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ u' & u' & u' \end{tikzcd} \subseteq S \Rightarrow S'$ et v arbitraire $\in S$
- Montrons que $uv \in S'$: ses réduits en une étape sont:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & uv \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ u'v & & uv' \end{tikzcd}$$

(à remplir)

(pour aller plus vite, je noterai u' un réduit en une étape quelconque de u, et pareil pour v et v')

- Pourquoi n'y a-t-il pas de 3ème cas où uv serait lui-même un redex?

car u est **neutre** (pas une λ)

$S \Rightarrow S$'vérifie (CR3)

(si S et S' sont des candidats)

(CR1) $S \subseteq \mathrm{SN}$

(CR2) si $u \in S \to u'$ alors $u' \in S$

(CR3) si u neutre $\to u', u', u' \subseteq S$ alors $u \in S$

$S \Rightarrow S' = \{u \mid \forall v \in S, uv \in S'\}$

- Soit u neutre $\to u', u', u' \subseteq S \Rightarrow S'$ et v arbitraire $\in S$
- Montrons que $uv \in S'$: ses réduits en une étape sont:

$$uv \to u'v \qquad uv \to uv'$$

(à remplir)

(pour aller plus vite, je noterai u' un réduit en une étape quelconque de u, et pareil pour v et v')

Dans S', car $u' \in S \Rightarrow S'$,
et $v \in S$

$S \Rightarrow S'$ vérifie (CR3)

(si S et S' sont des candidats)

(CR1) $S \subseteq \mathrm{SN}$

(CR2) si $u \in S \to u'$ alors $u' \in S$

(CR3) si u neutre $\to u', u', u' \subseteq S$ alors $u \in S$

$S \Rightarrow S' = \{u \mid \forall\, v \in S, uv \in S'\}$

- Soit u neutre $\to u', u', u' \subseteq S \Rightarrow S'$ et v arbitraire $\in S$
- Montrons que $uv \in S'$: ses réduits en une étape sont:

$$uv \to u'v, \quad uv \to uv'$$

(à remplir)

(pour aller plus vite, je noterai u' un réduit en une étape quelconque de u, et pareil pour v et v')

$u'v$: Dans S', car $u' \in S \Rightarrow S'$, et $v \in S$

uv': Dans S', pourquoi?
(il semble que ce soit aussi difficile à montrer que $uv \in S'$, non?)

$S \Rightarrow S'$ vérifie (CR3)

(si S et S' sont des candidats)

(CR1) $S \subseteq \mathrm{SN}$

(CR2) si $u \in S \to u'$ alors $u' \in S$

(CR3) si $\begin{array}{c} u \text{ neutre} \\ \swarrow \downarrow \searrow \\ \boxed{u' \quad u' \quad u'} \subseteq S \end{array}$ alors $u \in S$

$S \Rightarrow S' = \{u \mid \forall v \in S, uv \in S'\}$

- Soit $\begin{array}{c} u \text{ neutre} \\ \swarrow \downarrow \searrow \\ \boxed{u' \quad u' \quad u'} \subseteq S \Rightarrow S' \end{array}$ et v arbitraire $\in S$
- Montrons que $uv \in S'$: ses réduits en une étape sont:

$$\begin{array}{c} uv \\ \swarrow \quad \searrow \\ u'v \qquad uv' \end{array}$$

(à remplir)

(pour aller plus vite, je noterai u' un réduit en une étape quelconque de u, et pareil pour v et v')

Oui, mais v' a décru dans $\to$ par rapport à v…

… et on peut faire une récurrence sur v le long de $\to$, car $v \in S \subseteq \mathrm{SN}$ (par (CR1))

$S \Rightarrow S'$ vérifie (CR3)

(si S et S' sont des candidats)

(CR1) $S \subseteq \mathrm{SN}$

(CR2) si $u \in S \to u'$ alors $u' \in S$

(CR3) si u neutre $\begin{tikzcd}[column sep=small] & u \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ u' & u' & u' \end{tikzcd} \subseteq S$ alors $u \in S$

$S \Rightarrow S' = \{u \mid \forall v \in S, uv \in S'\}$

- Soit u neutre et v arbitraire $\in S$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & u \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ u' & u' & u' \end{tikzcd} \subseteq S \Rightarrow S'$$

- Montrons que $uv \in S'$ **par récurrence** sur $v \in S \subseteq \mathrm{SN}$ le long de $\to$ (merci (CR1)); ses réduits en une étape sont:

$$\begin{tikzcd} & uv \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ u'v & & uv' \end{tikzcd}$$

Dans S', car $u' \in S \Rightarrow S'$, et $v \in S$

Dans S', par hypothèse de récurrence

$S \Rightarrow S'$ vérifie (CR3)

(si S et S' sont des candidats)

(CR1) $S \subseteq \mathrm{SN}$

(CR2) si $u \in S \to u'$ alors $u' \in S$

(CR3) si $\begin{array}{c} u \text{ neutre} \\ \swarrow \downarrow \searrow \\ \underbrace{u' \quad u' \quad u'}_{\subseteq S} \end{array}$ alors $u \in S$

$S \Rightarrow S' = \{u \mid \forall v \in S, uv \in S'\}$

- Soit $\begin{array}{c} u \text{ neutre} \\ \swarrow \downarrow \searrow \\ u' \end{array}$ et v arbitraire $\in S$

Ou bien, si vous préférez:

- Montrons que $uv \in S'$ par récurrence sur **la plus grande longueur de réduction** partant de $v \in S \subseteq \mathrm{SN}$ (merci (CR1)); ses réduits en une étape sont:

$$\begin{array}{ccc} & uv & \\ \swarrow & & \searrow \\ u'v & & uv' \end{array}$$

Dans S', car $u' \in S \Rightarrow S'$, et $v \in S$

Dans S', par hypothèse de récurrence

$S \Rightarrow S'$ vérifie (CR3)

(si S et S' sont des candidats)

(CR1) $S \subseteq \mathrm{SN}$

(CR2) si $u \in S \to u'$ alors $u' \in S$

(CR3) si u neutre $\begin{array}{ccc} & u & \\ \swarrow & \downarrow & \searrow \\ u' & u' & u' \end{array} \subseteq S$ alors $u \in S$

$S \Rightarrow S' = \{u \mid \forall\, v \in S,\ uv \in S'\}$

- Soit u neutre $\begin{array}{ccc} & u & \\ \swarrow & \downarrow & \searrow \\ u' & u' & u' \end{array} \subseteq S \Rightarrow S'$ et v arbitraire $\in S$
- De quelque façon qu'on s'y prenne,
  on a montré que $uv \in S'$
- Comme v arbitraire, $u \in S \Rightarrow S'$, par déf. de $S \Rightarrow S'$.
- *Ouf.* $S \Rightarrow S'$ *est un candidat, pour tous candidats* S *et* S'*.*

Candidats de réductibilité

(CR1) $S \subseteq \mathrm{SN}$

(CR2) si $u \in S \to u'$ alors $u' \in S$

(CR3) si $\begin{array}{c} u \text{ neutre} \\ \swarrow \;\; \downarrow \;\; \searrow \\ u' \quad u' \quad u' \end{array} \subseteq S$ alors $u \in S$

- Nous avons mis ~20 pages à montrer:
- **Lemme A.** Si S et S' sont des candidats de réductibilité, alors $S \Rightarrow S'$ aussi.

  $S \Rightarrow S' = \{u \mid \forall v \in S, uv \in S'\}$
- On pose $\mathrm{RED}_b = \mathrm{SN}$, $\mathrm{RED}_{F \Rightarrow G} = \mathrm{RED}_F \Rightarrow \mathrm{RED}_G$
- Vérifiez que SN vérifie (CR1)–(CR3) (facile). Donc:
- **Lemme B.** Pour tout type F, RED_F est un candidat. (Preuve: par récurrence sur F.)

Valeurs de v…

Une autre lecture de ce que nous avons montré:

(CR1) $S \subseteq \mathrm{SN}$

(CR2) si $u \in S \to u'$ alors $u' \in S$

(CR3) si u neutre $\to u', u', u' \subseteq S$ alors $u \in S$

❖ …ns ~20 pages à montrer:

❖ **Lemme A.** Si S et S' sont des valeurs de vérité,
alors $S \Rightarrow S'$ aussi.

$S \Rightarrow S' = \{u \mid \forall v \in S, uv \in S'\}$

❖ On pose $[\![b]\!] = \mathrm{SN}$, $[\![F \Rightarrow G]\!] = [\![F]\!] \Rightarrow [\![G]\!]$

❖ Vérifiez que SN vérifie (CR1)–(CR3) (facile). Donc:

❖ **Lemme B.** Pour tt. formule F, $[\![F]\!]$ est une valeur de vérité
(Preuve: par récurrence sur F.)

Un point d'étape

(CR1) $S \subseteq \mathrm{SN}$

(CR2) si $u \in S \to u'$ alors $u' \in S$

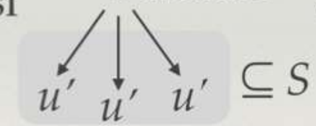
(CR3) si $\begin{array}{c} u \text{ neutre} \\ \swarrow \ \downarrow \ \searrow \\ u' \quad u' \quad u' \end{array} \subseteq S$ alors $u \in S$

- Nous en sommes à peu près à la moitié de la démonstration de: « si $\Gamma \vdash u : F$ dérivable alors $u \in \mathrm{RED}_F$ » (en fait, $u\theta \in \mathrm{RED}_F$ pour toute substitution $\theta \in \underline{\mathrm{RED}}_\Gamma$)
- même si pour le moment, tout ce qu'on a montré, c'est que RED_F est un candidat de réductibilité…
- au moins ça permettra de déduire que u (en fait $u\theta$) est dans SN — car RED_F vérifie (CR1).

Un point d'étape

(CR1) $S \subseteq \mathrm{SN}$

(CR2) si $u \in S \to u'$ alors $u' \in S$

(CR3) si u neutre 

alors $u \in S$

- C'est assez fantastique: nous avons passé tout ce temps à démontrer que RED_F est bien une généralisation de (implique) SN
- et c'est tout…

Deux petites précisions (1/2)

- Lorsque u est dans RED_F, on dira que
  u est **réductible au type *F***
- … surtout pas « de » type F: il n'y a (a priori) **aucune relation** entre être dans RED_F et être de type F
- La définition de RED_F ne fait **pas du tout** appel aux règles de typage!
- J'ai vu pas mal d'erreurs dans le passé liées à ça…

Deux petites précisions (2/2)

- Lorsque u est dans RED_F, on dira que
  u est **réductible au type F**
- … n'a **rien à voir** avec une notion de réduction $\rightarrow$!
- J'ai aussi vu pas mal d'erreurs liées à ça dans le passé…
- (Oui, c'est mal nommé. Une variante a été appelée « calculable au type F », ce n'est pas mieux…)

Un lemme utile

- Pour démontrer qu'une application uv est réductible à un certain type G ($uv \in \mathrm{RED}_G$), c'est facile: démontrez
  $u \in \mathrm{RED}_{F \Rightarrow G}$ et $v \in \mathrm{RED}_F$ pour un certain type F
- Mais comment démontrer qu'une **λ-abstraction** $\lambda x.s$ est dans $\mathrm{RED}_{F \Rightarrow G}$?
- Non, démontrer $s \in \mathrm{RED}_G$ ne suffit pas.
  On va montrer (roulement de tambour…):

Un lemme utile

(CR1) $S \subseteq \mathrm{SN}$

(CR2) si $u \in S \to u'$ alors $u' \in S$

(CR3) si $\begin{array}{c} u \text{ neutre} \\ \swarrow\ \downarrow\ \searrow \\ u' \quad u' \quad u' \end{array} \subseteq S$ alors $u \in S$

- **Lemme C.** Si (pour tout $v \in \mathrm{RED}_F$, $s[x{:=}v] \in \mathrm{RED}_G$)
  alors $\lambda x.s \in \mathrm{RED}_{F \Rightarrow G}$
- Ça se démontre un peu comme (CR3) pour $F \Rightarrow G$, mais en un peu plus compliqué (arg… révisez la preuve que si S et S' sont candidats alors $S \Rightarrow S'$ vérifie (CR3) si vous n'êtes pas sûr de l'avoir bien comprise!)
- Note: comparez avec la sémantique de Brouwer-H.-K.: ça dit « si s calcule une \`preuve' de $G$ chaque fois qu'on pose $x$=une \`preuve' de F, alors $\lambda x.s$ est une \`preuve' de $F \Rightarrow G$.)

Un lemme utile

(CR1) $S \subseteq \mathrm{SN}$

(CR2) si $u \in S \to u'$ alors $u' \in S$

(CR3) si
$$\begin{tikzcd} & u \text{ neutre} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ u' & u' & u' \end{tikzcd} \subseteq S$$
alors $u \in S$

- **Lemme C.** Si (pour tout $v \in \mathrm{RED}_F$, $s[x{:=}v] \in \mathrm{RED}_G$)
  alors $\lambda x.s \in \mathrm{RED}_{F \Rightarrow G}$

- D'abord, on remarque que sous l'hypothèse,
  ***s* est dans $\mathbf{RED}_G$**
  (appliquer l'hypothèse à $v{=}x$, qui est dans RED_F,
  car toute variable est dans tout candidat;
  rappelez-vous, c'était à cause de (CR3).)

- Par (CR1), s est donc dans SN,
  et l'on peut donc faire des récurrences sur s le long de $\to$.

Un lemme utile

(CR1) $S \subseteq SN$

(CR2) si $u \in S \to u'$ alors $u' \in S$

(CR3) si $\begin{array}{c} u \text{ neutre} \\ \swarrow \;\; \downarrow \;\; \searrow \\ \boxed{u' \;\; u' \;\; u'} \subseteq S \end{array}$ alors $u \in S$

- **Lemme C.** Si (pour tout $v \in \mathrm{RED}_F$, $s[x{:=}v] \in \mathrm{RED}_G$)
  alors $\lambda x.s \in \mathrm{RED}_{F \Rightarrow G}$

Note: s est donc dans SN

- Par définition de $\mathrm{RED}_{F \Rightarrow G}$, il suffit de démontrer que pour tout $v \in \mathrm{RED}_F$, $(\lambda x.s)v$ est dans RED_G
- Rappel: **non**, $(\lambda x.s)v$ n'est pas égal à $s[x{:=}v]$!
  toute la difficulté de la preuve est là.

Un lemme utile

(CR1) $S \subseteq \mathrm{SN}$

(CR2) si $u \in S \to u'$ alors $u' \in S$

(CR3) si $\begin{array}{c} u \text{ neutre} \\ \swarrow \ \downarrow \ \searrow \\ u' \ \ u' \ \ u' \end{array} \subseteq S$ alors $u \in S$

- **Lemme C.** Si (pour tout $v \in \mathrm{RED}_F$, $s[x{:=}v] \in \mathrm{RED}_G$) alors $\lambda x.s \in \mathrm{RED}_{F \Rightarrow G}$

Note: s est donc dans SN

- Par définition de $\mathrm{RED}_{F \Rightarrow G}$, il suffit de démontrer que pour tout $v \in \mathrm{RED}_F$, $(\lambda x.s)v$ est dans RED_G
- Mais $(\lambda x.s)v$ est neutre, et il suffit donc de regarder ses réduits en une étape, et d'appliquer (CR3) à $S = \mathrm{RED}_G$
- Il y a maintenant **trois** cas ples:

$$\begin{array}{ccc} & (\lambda x.s)v & \\ \swarrow & \downarrow & \searrow \\ s[x{:=}v] & (\lambda x.s')v & (\lambda x.s)v' \end{array}$$

(pour aller plus vite, je noterai s' un réduit en une étape quelconque de s, et pareil pour v et v')

Dans RED_G, par hypothèse (facile!)

Un lemme utile

(CR1) $S \subseteq \mathrm{SN}$

(CR2) si $u \in S \to u'$ alors $u' \in S$

(CR3) si
$$\begin{tikzcd} & u \text{ neutre} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ u' & u' & u' \end{tikzcd} \subseteq S$$
alors $u \in S$

- **Lemme C.** Si (pour tout $v \in \mathrm{RED}_F$, $s[x{:=}v] \in \mathrm{RED}_G$) alors $\lambda x.s \in \mathrm{RED}_{F \Rightarrow G}$

Note: s est donc dans SN

- Par définition de $\mathrm{RED}_{F \Rightarrow G}$, il suffit de démontrer que pour tout $v \in \mathrm{RED}_F$, $(\lambda x.s)v$ est dans RED_G

- Il y a maintenant **trois** cas de réduction possibles:

$$\begin{tikzcd} & (\lambda x.s)v \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ s[x{:=}v] & (\lambda x.s')v & (\lambda x.s)v' \end{tikzcd}$$

Dans RED_G, par hypothèse (facile!)

Dans RED_G, pourquoi?
(il semble que ce soit aussi difficile à montrer que $(\lambda x.s)v \in \mathrm{RED}_G$, non?)

Un lemme utile

(CR1) $S \subseteq SN$

(CR2) si $u \in S \to u'$ alors $u' \in S$

(CR3) si u neutre alors $u \in S$

$$\begin{tikzcd} & u \text{ neutre} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ u' & u' & u' \end{tikzcd} \subseteq S$$

- **Lemme C.** Si (pour tout $v \in RED_F$, $s[x:=v] \in RED_G$) alors $\lambda x.s \in RED_{F \Rightarrow G}$

Note: s est donc dans SN

- Par définition de $RED_{F \Rightarrow G}$, il suffit de démontrer que pour tout $v \in RED_F$, $(\lambda x.s)v$ est dans RED_G
- par **récurrence** sur (s, v) ordonné par $\to^* \times_{\text{lexicogr.}} \to^*$
- ou, si vous préférez, sur la **somme** des plus grandes longueurs de réduction partant de s et partant de v
- Dans les deux cas, c'est possible parce que s et v sont dans SN.

Un lemme utile

(CR1) $S \subseteq SN$

(CR2) si $u \in S \rightarrow u'$ alors $u' \in S$

(CR3) si
$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & u \text{ neutre} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ u' & u' & u' \subseteq S \end{tikzcd}$$
alors $u \in S$

- **Lemme C.** Si (pour tout $v \in \mathrm{RED}_F$, $s[x{:=}v] \in \mathrm{RED}_G$) alors $\lambda x.s \in \mathrm{RED}_{F\Rightarrow G}$

Note: s est donc dans SN

- Par définition de $\mathrm{RED}_{F\Rightarrow G}$, il suffit de démontrer que pour tout $v \in \mathrm{RED}_F$, $(\lambda x.s)v$ est dans RED_G

par réc. sur (s, v) le long de $\rightarrow^* \times_{\text{lexicogr.}} \rightarrow^*$

- Il y a maintenant **trois** cas de réduction possibles:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & (\lambda x.s)v \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ s[x{:=}v] & (\lambda x.s')v & (\lambda x.s)v' \end{tikzcd}$$

Dans RED_G, par hypothèse (facile!)

Dans RED_G, par hypothèse de récurrence, car (s,v) $(\rightarrow, .)$ (s',v) et (s,v) $(=, \rightarrow)$ (s,v')

Un lemme utile

(CR1) $S \subseteq \mathrm{SN}$

(CR2) si $u \in S \to u'$ alors $u' \in S$

(CR3) si u neutre $\to u', u', u' \subseteq S$ alors $u \in S$

- **Lemme C.** Si (pour tout $v \in \mathrm{RED}_F$, $s[x{:=}v] \in \mathrm{RED}_G$) alors $\lambda x.s \in \mathrm{RED}_{F \Rightarrow G}$

Note: s est donc dans SN

- Par définition de $\mathrm{RED}_{F \Rightarrow G}$, il suffit de démontrer que pour tout $v \in \mathrm{RED}_F$, $(\lambda x.s)v$ est dans RED_G

par réc. sur (s, v) le long de $\to^* \times_{\text{lexicogr.}} \to^*$

- Les trois cas de réduction possibles:

$$(\lambda x.s)v \to s[x{:=}v] \qquad (\lambda x.s)v \to (\lambda x.s')v \qquad (\lambda x.s)v \to (\lambda x.s)v'$$

$\subseteq \mathrm{RED}_G$

- Comme $(\lambda x.s)v$ est neutre, on en déduit $(\lambda x.s)v \in \mathrm{RED}_G$ par (CR3). Qed.

- On approche de la fin, courage!

La démonstration

- **Def:** $\theta \in \underline{\mathrm{RED}}_\Gamma$ ssi pour tout $x{:}F$ dans Γ, $\theta(x) \in \mathrm{RED}_F$
- **Thm.** si $\Gamma \vdash u : G$ dérivable alors
  pour toute $\theta \in \underline{\mathrm{RED}}_\Gamma$, $u\theta \in \mathrm{RED}_G$.

$$\frac{}{\Gamma, x : F \vdash x : F}\,(Var)$$

$$\frac{\Gamma \vdash u : F_1 \Rightarrow F_2 \quad \Gamma \vdash v : F_1}{\Gamma \vdash uv : F_2}\,(App)$$

$$\frac{\Gamma, x : F_1 \vdash u : F_2}{\Gamma \vdash \lambda x \cdot u : F_1 \Rightarrow F_2}\,(Abs)$$

- Preuve: par récurrence sur la dérivation de $\Gamma \vdash u : G$.
- Cas 1/3: si la dernière règle appliquée est (Var),
  u est une variable x et $x{:}G$ est dans Γ

donc $u\theta = \theta(x) \in \mathrm{RED}_G$

La démonstration

- **Thm.** si $\Gamma \vdash u : G$ dérivable alors
  pour toute $\theta \in \underline{\text{RED}}_\Gamma$, $u\theta \in \text{RED}_G$.

$$\frac{}{\Gamma, x : F \vdash x : F}\,(Var)$$

$$\frac{\Gamma \vdash u : F_1 \Rightarrow F_2 \quad \Gamma \vdash v : F_1}{\Gamma \vdash uv : F_2}\,(App)$$

$$\frac{\Gamma, x : F_1 \vdash u : F_2}{\Gamma \vdash \lambda x \cdot u : F_1 \Rightarrow F_2}\,(Abs)$$

- Cas 2/3: si la dernière règle appliquée est (App),
  $u{=}st$

$$\frac{\Gamma \vdash s : F \Rightarrow G \qquad \Gamma \vdash t : F}{\Gamma \vdash st : G}\,(App)$$

- Par hypothèse de récurrence,
  pour toute $\theta \in \underline{\text{RED}}_\Gamma$, $s\theta \in \text{RED}_{F \Rightarrow G}$
  $t\theta \in \text{RED}_F$,
- Par déf. de $\text{RED}_{F \Rightarrow G}$, $u\theta = (s\theta)(t\theta)$ est dans RED_G.

La démonstration

- **Thm.** si $\Gamma \vdash u : G$ dérivable alors
  pour toute $\theta \in \underline{\mathrm{RED}}_\Gamma$, $u\theta \in \mathrm{RED}_G$.

$$\frac{}{\Gamma, x : F \vdash x : F}\ (Var)$$

$$\frac{\Gamma \vdash u : F_1 \Rightarrow F_2 \quad \Gamma \vdash v : F_1}{\Gamma \vdash uv : F_2}\ (App)$$

$$\frac{\Gamma, x : F_1 \vdash u : F_2}{\Gamma \vdash \lambda x \cdot u : F_1 \Rightarrow F_2}\ (Abs)$$

- Cas 3/3: si la dernière règle appliquée est (Abs), $u = \lambda x.s$

$$\frac{\Gamma,\ x : F \vdash s : G}{\Gamma \vdash \lambda x.s : F \Rightarrow G}\ (Abs)$$

- Par hypothèse de récurrence,
  pour toute $\theta \in \underline{\mathrm{RED}}_\Gamma$,
  pour tout $v \in \mathrm{RED}_F$, $\theta[x:=v]$ est dans $\underline{\mathrm{RED}}_{\Gamma,\, x:F}$,
  donc $s(\theta[x:=v])$ est dans RED_G.

La substitution parallèle qui à x associe v et à toute autre y associe $\theta(y)$

- Or $s(\theta[x:=v]) = (s\theta)[x:=v]$

Ah oui, il faut le montrer! On utilise que x est fraîche (alpha-renommage), donc pas dans le domaine de θ ni libre dans aucun $\theta(y)$

- Par le lemme C, $(\lambda x.s)\theta = \lambda x.(s\theta)$ est dans $\mathrm{RED}_{F \Rightarrow G}$. Qed.

Ça aussi! Mêmes conditions de variables libres

- **Lemme C.** Si (pour tout $v \in \mathrm{RED}_F$, $s[x:=v] \in \mathrm{RED}_G$) alors $\lambda x.s \in \mathrm{RED}_{F \Rightarrow G}$

Conclusion

- **Thm.** si $\Gamma \vdash u : G$ dérivable alors
  pour toute $\theta \in \underline{\mathrm{RED}}_\Gamma$, $u\theta \in \mathrm{RED}_G$.
- En particulier:
  — pour θ = substitution identité
  (qui à toute variable associe elle-même),
  qui est dans $\underline{\mathrm{RED}}_\Gamma$ parce que
  toute variable est dans tout candidat
  — et comme $\mathrm{RED}_G \subseteq \mathrm{SN}$ (CR1):
- **Thm.** Tout terme typable (dans les types simples) est dans SN.

La prochaine fois

La prochaine fois

- Recherche de preuve
- Autres logiques propositionnelles:
  le « et », le « ou », le « non »,
- … ainsi que la logique propositionnelle classique,
- … et ce que tout ça signifie en termes de langages de programmation