Jean Goubault-Larrecq

λ-calcul

3. Pouvoir expressif

Fonctions calculables

- Plusieurs modèles:
  - Machines de Turing
  - Machines à compteurs (Marvin Minsky)
  - Fonctions récursives (Kurt Gödel)
  - λ-calcul
- Ils sont tous équivalents (« thèse de Church »)

Fonctions calculables

- On admettra que machines de Turing ≡ fonctions récursives (voir cours de calculabilité)
- On peut implémenter la β-réduction du λ-calcul sur une machine de Turing (pour les détails, voir partie 3 du cours)
- On va montrer que toutes les **fonctions récursives** (générales) se codent en λ-calcul; d'abord, les fonctions **primitives récursives**

Fonctions primitives récursives, et récursives (générales)

Les fonctions primitives récursives

- L'ensemble **PR** des fonctions **primitives récursives** est le plus petit contenant:
    - les fonctions **constantes** : $\mathbf{N}^k \to \mathbf{N}$ (pour tout k)
    - la fonction **successeur** $S : m \in \mathbf{N} \mapsto m+1$
    - les **projections** $\pi_i^k : (m_1,\ldots,m_k) \in \mathbf{N}^k \mapsto m_i$ $(1 \leq i \leq k)$
- et clos par les opérations de…

Les fonctions primitives récursives

- L'ensemble **PR** des fonctions **primitives récursives** est le plus petit contenant les **constantes**, le **successeur**, les **projections** et clos par les opérations de:
  - **composition**: si $g_1, \ldots, g_k : \mathbf{N}^\ell \to \mathbf{N}$ sont dans **PR**, et $f : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N}$ est dans **PR**, alors
    $$f \circ \langle g_1, \ldots, g_k \rangle : \underline{m} \in \mathbf{N}^\ell \mapsto f(g_1(\underline{m}),\ldots,g_k(\underline{m}))$$
    est dans **PR**

Les fonctions primitives récursives

- L'ensemble **PR** des fonctions **primitives récursives** est le plus petit contenant les **constantes**, le **successeur**, les **projections** et clos par les opérations de:
  - **composition**: si $g_1, \ldots, g_k : \mathbf{N}^\ell \to \mathbf{N}$ sont dans **PR**, et $f : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N}$ est dans **PR**, alors
  $$f \circ \langle g_1, \ldots, g_k \rangle : \underline{m} \in \mathbf{N}^\ell \mapsto f(g_1(\underline{m}), \ldots, g_k(\underline{m}))$$
  est dans **PR**
  - **récurrence primitive**: si $f : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N}$ et $g : \mathbf{N}^{k+2} \to \mathbf{N}$ sont dans **PR**, alors $R_{f,g} : \mathbf{N}^{k+1} \to \mathbf{N}$ est dans **PR**, où [déf. par réc. sur le 1er arg.]
  $$R_{f,g}(0, \underline{m}) \stackrel{\text{def}}{=} f(\underline{m}) \qquad \text{[cas de base]}$$
  $$R_{f,g}(n+1, \underline{m}) \stackrel{\text{def}}{=} g(n, R_{f,g}(n, \underline{m}), \underline{m}) \qquad \text{[cas de récurrence]}$$

Les fonctions récursives générales

- Toutes les fonctions primitives récursives sont **totales**.
  Mais ce n'est pas le cas de toutes les fonctions récursives (calculables).
  Il nous manque un équivalent de la boucle `while` générale.

Les fonctions récursives générales

- Toutes les fonctions primitives récursives sont **totales**.
  Mais ce n'est pas le cas de toutes les fonctions récursives (calculables).
  Il nous manque un équivalent de la boucle `while` générale.

- Traditionnellement, on utilise la **minimisation**:
  pour toute fonction (partielle) $f : \mathbf{N}^{k+1} \to \mathbf{N}$,
  on note $\mu f : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N}$ la fonction (partielle) telle que:
  — $\mu f(\underline{m}) \stackrel{\text{def}}{=}$ l'unique entier n tel que $f(n,\underline{m})=0$
  et pour tout entier $i < n$, $f(i,\underline{m})$ est défini et $\neq 0$
  … s'il existe
  — $\mu f(\underline{m})$ indéfini sinon

$\mu f(\underline{m})$ = « le premier entier n tel que $f(n,\underline{m})=0$ »
mais pas tout à fait; presque!

Les fonctions récursives générales

- Toutes les fonctions primitive
Mais ce n'est pas le cas de tou
(calculables).
Il nous manque un équivalent

- Traditionnellement, on utilise la **minimisation**:
pour toute fonction (partielle) $f : \mathbf{N}^{k+1} \longrightarrow \mathbf{N}$,
on note $\mu f : \mathbf{N}^k \longrightarrow \mathbf{N}$ la fonction (partielle) telle que:
— $\mu f(\underline{m}) \stackrel{\text{def}}{=}$ l'unique entier n tel que $f(n,\underline{m})=0$
et pour tout entier $i < n$, $f(i,\underline{m})$ est défini et $\neq 0$
… s'il existe
— $\mu f(\underline{m})$ indéfini sinon

Informatiquement:

```
let i = ref 0 in (
     while f(!i,m)!=0 do i:=!i+1;
    !i)
```

$\mu f(\underline{m})$ = « le premier entier n tel que $f(n,\underline{m})=0$ »
mais pas tout à fait; presque!

Les fonctions récursives générales

- Toutes les fonctions primitives
  Mais ce n'est pas le cas de tou
  (calculables).
  Il nous manque un équivalent

Informatiquement:

```
let i = ref 0 in (
     while f(!i,m)!=0 do i:=!i+1;
    !i)
```

- Traditionnellement, on utilise la **minimisation**:
  pour toute fonction (partielle) $f : \mathbf{N}^{k+1} \longrightarrow \mathbf{N}$,
  on note $\mu f : \mathbf{N}^k \longrightarrow \mathbf{N}$ la fonction (partielle) telle que:
  — $\mu f(\underline{m}) \stackrel{\text{def}}{=}$ l'unique entier n tel que $f(n,\underline{m})=0$
  et pour tout entier $i < n$, $f(i,\underline{m})$ est défini et $\neq 0$
  … s'il existe
  — $\mu f(\underline{m})$ indéfini sinon

$\mu f(\underline{m})$ = « le premier entier n tel que $f(n,\underline{m})=0$ »
à condition que tous les $f(i,\underline{m})$, $i<n$, soient **définis**

Les fonctions récursives générales

- L'ensemble **Rec** des fonctions **récursives** est le plus petit contenant les **constantes**, le **successeur**, les **projections** et clos par les opérations de:

Les fonctions récursives générales

- L'ensemble **Rec** des fonctions **récursives** est le plus petit contenant les **constantes**, le **successeur**, les **projections** et clos par les opérations de:
  - **composition**: si $g_1, \ldots, g_k : \mathbf{N}^\ell \to \mathbf{N} \in \mathbf{Rec}$, et $f : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N} \in \mathbf{Rec}$, alors
  $$f \circ \langle g_1, \ldots, g_k \rangle : \underline{m} \in \mathbf{N}^\ell \to f(g_1(\underline{m}),\ldots,g_k(\underline{m}))$$
  est dans **Rec**

Les fonctions récursives générales

- L'ensemble **Rec** des fonctions **récursives** est le plus petit contenant les **constantes**, le **successeur**, les **projections** et clos par les opérations de:
  - **composition**: si $g_1, \ldots, g_k : \mathbf{N}^\ell \to \mathbf{N} \in \mathbf{Rec}$, et $f : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N} \in \mathbf{Rec}$, alors
    $$f \circ \langle g_1, \ldots, g_k \rangle : \underline{m} \in \mathbf{N}^\ell \to f(g_1(\underline{m}),\ldots,g_k(\underline{m}))$$
    est dans **Rec**
  - **récurrence primitive**: si $f : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N}$ et $g : \mathbf{N}^{k+2} \to \mathbf{N} \in \mathbf{Rec}$, alors $R_{f,g} : \mathbf{N}^{k+1} \to \mathbf{N} \in \mathbf{Rec}$, où
    $$R_{f,g}(0, \underline{m}) \stackrel{\text{def}}{=} f(\underline{m})$$
    $$R_{f,g}(n+1, \underline{m}) \stackrel{\text{def}}{=} g(n, R_{f,g}(n, \underline{m}), \underline{m})$$

Les fonctions récursives générales

- L'ensemble **Rec** des fonctions **récursives** est le plus petit contenant les **constantes**, le **successeur**, les **projections** et clos par les opérations de:
  - **composition**: si $g_1, \ldots, g_k : \mathbf{N}^\ell \to \mathbf{N} \in \mathbf{Rec}$, et $f : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N} \in \mathbf{Rec}$, alors
    $$f \circ \langle g_1, \ldots, g_k \rangle : \underline{m} \in \mathbf{N}^\ell \to f(g_1(\underline{m}),\ldots,g_k(\underline{m}))$$
    est dans **Rec**
  - **récurrence primitive**: si $f : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N}$ et $g : \mathbf{N}^{k+2} \to \mathbf{N} \in \mathbf{Rec}$, alors $R_{f,g} : \mathbf{N}^{k+1} \to \mathbf{N} \in \mathbf{Rec}$, où
    $$R_{f,g}(0, \underline{m}) \stackrel{\text{def}}{=} f(\underline{m})$$
    $$R_{f,g}(n+1, \underline{m}) \stackrel{\text{def}}{=} g(n, R_{f,g}(n, \underline{m}), \underline{m})$$
  - **minimisation**: si $f : \mathbf{N}^{k+1} \to \mathbf{N} \in \mathbf{Rec}$, alors $\mu f : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N} \in \mathbf{Rec}$

Nouveau!

Les fonctions récursives générales

- L'ensemble **Rec** des fonctions **récursives** est le plus petit contenant les **constantes**, le **successeur**, les **projections** et clos par les opérations de:

($f \circ \langle g_1, \ldots, g_k\rangle$) ($\underline{m}$) défini ssi
côté droit $f(g_1(\underline{m}),\ldots,g_k(\underline{m}))$ **défini**

  - **composition**: si $g_1, \ldots, g_k : \mathbf{N}^\ell \to \mathbf{N} \in$ **Rec**, et $f : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N} \in$ **Rec**, alors
$$f \circ \langle g_1, \ldots, g_k\rangle : \underline{m} \in \mathbf{N}^\ell \to f(g_1(\underline{m}),\ldots,g_k(\underline{m}))$$
est dans **Rec**

  - **récurrence primitive**: si $f : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N}$ et $g : \mathbf{N}^{k+2} \to \mathbf{N} \in$ **Rec**, alors $R_{f,g} : \mathbf{N}^{k+1} \to \mathbf{N} \in$ **Rec**, où
$$R_{f,g}(0, \underline{m}) \stackrel{\text{def}}{=} f(\underline{m})$$
$$R_{f,g}(n+1, \underline{m}) \stackrel{\text{def}}{=} g(n, R_{f,g}(n, \underline{m}), \underline{m})$$

Nouveau!

  - **minimisation**: si $f : \mathbf{N}^{k+1} \to \mathbf{N} \in$ **Rec**, alors $\mu f : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N} \in$ **Rec**

Les fonctions récursives générales

- L'ensemble **Rec** des fonctions **récursives** est le plus petit contenant les **constantes**, le **successeur**, les **projections** et clos par les opérations de:

  $(f \circ \langle g_1, \ldots, g_k \rangle)\ (\underline{m})$ défini ssi
  côté droit $f(g_1(\underline{m}),\ldots,g_k(\underline{m}))$ **défini**

  - **composition**: si $g_1, \ldots, g_k : \mathbf{N}^\ell \to \mathbf{N} \in$ **Rec**, et $f : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N} \in$ **Rec**, alors
  $$f \circ \langle g_1, \ldots, g_k \rangle : \underline{m} \in \mathbf{N}^\ell \to f(g_1(\underline{m}),\ldots,g_k(\underline{m}))$$
  est dans **Rec**
  - **récurrence primitive**: si $f : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N}$ et $g : \mathbf{N}^{k+2} \to \mathbf{N} \in$ **Rec**, alors $R_{f,g} : \mathbf{N}^{k+1} \to \mathbf{N} \in$ **Rec**, où

  ceci voulant maintenant dire que
  le côté gauche est défini
  ssi le côté droit est **défini**

  Nouveau!
  $$R_{f,g}(0, \underline{m}) \stackrel{\text{def}}{=} f(\underline{m})$$
  $$R_{f,g}(n+1, \underline{m}) \stackrel{\text{def}}{=} g(n, R_{f,g}(n, \underline{m}), \underline{m})$$
  - **minimisation**: si $f : \mathbf{N}^{k+1} \to \mathbf{N} \in$ **Rec**, alors $\mu f : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N} \in$ **Rec**

Les entiers de Church

- Avant de commencer, il va falloir trouver une représentation des **entiers**
- Il y en a plusieurs, mais l'une des plus naturelles est:

$$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, \underbrace{f(f(\ldots(f}_{n \text{ fois } f}x))) \qquad \text{[entier de \textbf{Church}]}$$

Les entiers de Church

- Avant de commencer, il va falloir trouver une représentation des **entiers**
- Il y en a plusieurs, mais l'une des plus naturelles est:
$$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f \, . \, \lambda x \, . \, \underbrace{f(f(\ldots(f}_{n \text{ fois } f}x))) \qquad \text{[entier de } \textbf{Church}\text{]}$$
- i.e., $\ulcorner n \urcorner$ est « la fonctionnelle $f \mapsto f^n$ » [**itérateur**]

Les entiers de Church

- Avant de commencer, il va falloir trouver une représentation des **entiers**
- Il y en a plusieurs, mais l'une des plus naturelles est:

$$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, \underbrace{f(f(\ldots(f}_{n \text{ fois } f}x))) \qquad \text{[entier de } \textbf{Church}\text{]}$$

- i.e., $\ulcorner n \urcorner$ est « la fonctionnelle $f \mapsto f^n$ » [**itérateur**]
- Je noterai donc, abusivement:

$$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, f^n(x)$$

But du codage

- On cherche, pour toute fonction récursive $f : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N}$, un λ-terme clos $\ulcorner f \urcorner$ tel que, pour tous $n_1, \ldots, n_k \in \mathbf{N}$, si $f(n_1, \ldots, n_k)$ est définie (et vaut, disons, n), alors

$$\ulcorner f \urcorner \ \ulcorner n_1 \urcorner \ \ldots \ \ulcorner n_k \urcorner =_\beta \ulcorner n \urcorner$$

But du codage

sans variable libre

- On cherche, pour toute fonction récursive $f : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N}$, un λ-terme clos $\ulcorner f \urcorner$ tel que, pour tous $n_1, \ldots, n_k \in \mathbf{N}$, si $f(n_1, \ldots, n_k)$ est définie (et vaut, disons, n), alors

$$\ulcorner f \urcorner\ \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner =_\beta \ulcorner n \urcorner$$

But du codage

sans variable libre

- On cherche, pour toute fonction récursive $f : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N}$, un λ-terme clos $\ulcorner f \urcorner$ tel que, pour tous $n_1, \ldots, n_k \in \mathbf{N}$, si $f(n_1, \ldots, n_k)$ est définie (et vaut, disons, n), alors
$$\ulcorner f \urcorner \ \ulcorner n_1 \urcorner \ \ldots \ \ulcorner n_k \urcorner =_\beta \ulcorner n \urcorner$$
- **Note**: ceci est équivalent à:
$$\ulcorner f \urcorner \ \ulcorner n_1 \urcorner \ \ldots \ \ulcorner n_k \urcorner \to^* \ulcorner n \urcorner$$
(pourquoi?)

Codage des fonctions de base

- Fonctions **constantes**:
  si $f(n_1, \ldots, n_k)$=la même constante n
  pour tous $n_1, \ldots, n_k$,
  $\ulcorner f \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda z_1 . \ldots . \lambda z_k . \ulcorner n \urcorner$

$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f . \lambda x . f^n(x)$

But: $\ulcorner f \urcorner \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner$
$=_\beta \ulcorner f(n_1, \ldots, n_k) \urcorner$
si $f(n_1, \ldots, n_k)$ défini

Codage des fonctions de base

- Fonctions **constantes**:
  si $f(n_1, \ldots, n_k)$=la même constante n
  pour tous $n_1, \ldots, n_k$,
  $$\ulcorner f \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda z_1 . \ldots . \lambda z_k . \ulcorner n \urcorner$$

- **Projections**:
  $$\ulcorner \pi_i^k \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda z_1 . \ldots . \lambda z_k . z_i$$

$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f . \lambda x . f^n(x)$

But: $\ulcorner f \urcorner \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner$
$=_\beta \ulcorner f(n_1, \ldots, n_k) \urcorner$
si $f(n_1, \ldots, n_k)$ défini

Codage des fonctions de base

$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f\,.\,\lambda x\,.\,f^n(x)$

But: $\ulcorner f \urcorner\ \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner$
$=_\beta \ulcorner f(n_1, \ldots, n_k) \urcorner$
si $f(n_1, \ldots, n_k)$ défini

- Fonctions **constantes**:
  si $f(n_1, \ldots, n_k)$=la même constante n
  pour tous $n_1, \ldots, n_k$,
  $\ulcorner f \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda z_1\,.\,\ldots\,.\,\lambda z_k\,.\,\ulcorner n \urcorner$
- **Projections**:
  $\ulcorner \pi_i^k \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda z_1\,.\,\ldots\,.\,\lambda z_k\,.\,z_i$
- **Successeur**: plusieurs possibilités:
  $\ulcorner \mathrm{S} \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda z\,.\,\lambda f\,.\,\lambda x\,.\,f(zfx)$ … par exemple

Le successeur

- **Successeur**: plusieurs possibilités:

  $$\ulcorner \mathrm{S} \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda z\,.\,\lambda f\,.\,\lambda x\,.\,f(zfx)$$

- Vérifions:

  $$\begin{aligned} \ulcorner \mathrm{S} \urcorner\ \ulcorner n \urcorner &\to \lambda f\,.\,\lambda x\,.\,f(\ulcorner n \urcorner\, f\, x) \\ &\to^2 \lambda f\,.\,\lambda x\,.\,f(f^n(x)) \\ &= \ulcorner n{+}1 \urcorner \end{aligned}$$

$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f\,.\,\lambda x\,.\,f^n(x)$

But: $\ulcorner f \urcorner\ \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner$
$=_\beta \ulcorner f(n_1, \ldots, n_k) \urcorner$
si $f(n_1, \ldots, n_k)$ défini

Le successeur

$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, f^n(x)$

But: $\ulcorner f \urcorner \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner$
$=_\beta \ulcorner f(n_1, \ldots, n_k) \urcorner$
si $f(n_1, \ldots, n_k)$ défini

- **Successeur**: plusieurs possibilités:
  $$\ulcorner S \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda z \,.\, \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, f(zfx)$$
- Vérifions:
  $$\begin{aligned} \ulcorner S \urcorner \ulcorner n \urcorner &\to \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, f(\ulcorner n \urcorner f\, x) \\ &\to^2 \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, f(f^n(x)) \\ &= \ulcorner n{+}1 \urcorner \end{aligned}$$

deux étapes ici, d'accord?

Le successeur

$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, f^n(x)$

But: $\ulcorner f \urcorner \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner$
$=_\beta \ulcorner f(n_1, \ldots, n_k) \urcorner$
si $f(n_1, \ldots, n_k)$ défini

- **Successeur**: plusieurs possibilités:

$$\ulcorner \mathrm{S} \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda z \,.\, \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, f(zfx)$$

- Vérifions:

$$\begin{aligned} \ulcorner \mathrm{S} \urcorner \ulcorner n \urcorner &\to \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, f(\ulcorner n \urcorner f\, x) \\ &\to^2 \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, f(f^n(x)) \\ &= \ulcorner n{+}1 \urcorner \end{aligned}$$

deux étapes ici, d'accord?

- Voyez-vous d'autres définitions possibles de $\ulcorner \mathrm{S} \urcorner$?

Le successeur

- **Successeur**: plusieurs possibilités:

  $\ulcorner S \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda z \,.\, \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, f(zfx)$

- Vérifions:

  $\ulcorner S \urcorner \, \ulcorner n \urcorner \to \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, f(\ulcorner n \urcorner \, f \, x)$

  $\to^2 \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, f(f^n(x))$

  $= \ulcorner n{+}1 \urcorner$

deux étapes ici, d'accord?

- Voyez-vous d'autres définitions possibles de $\ulcorner S \urcorner$?

- $\lambda z \,.\, \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, zf(fx)$, par exemple

$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, f^n(x)$

But: $\ulcorner f \urcorner \, \ulcorner n_1 \urcorner \dots \ulcorner n_k \urcorner$
$=_\beta \ulcorner f(n_1, \dots, n_k) \urcorner$
si $f(n_1, \dots, n_k)$ défini

Le successeur

$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, f^n(x)$

But: $\ulcorner f \urcorner\ \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner$
$=_\beta \ulcorner\ f(n_1, \ldots, n_k)\ \urcorner$
si $f(n_1, \ldots, n_k)$ défini

- **Successeur**: plusieurs possibilités:

  $$\ulcorner S \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda z \,.\, \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, f(zfx)$$

- Vérifions:

  $$\begin{aligned} \ulcorner S \urcorner\ \ulcorner n \urcorner &\to \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, f(\ulcorner n \urcorner\, f\, x) \\ &\to^2 \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, f(f^n(x)) \\ &= \ulcorner n{+}1 \urcorner \end{aligned}$$

deux étapes ici,
d'accord?

- Voyez-vous d'autres définitions possibles de $\ulcorner S \urcorner$?

- $\lambda z \,.\, \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, zf(fx)$, par exemple

au fait, pourquoi ce terme-ci n'est-il
pas β-équivalent à $\ulcorner S \urcorner$ ci-dessus?

Une parenthèse: opérations arithmétiques

- Toutes les opérations arithmétiques sont primitives récursives, mais on peut aussi les définir directement

$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, f^n(x)$

But: $\ulcorner f \urcorner \ulcorner n_1 \urcorner \dots \ulcorner n_k \urcorner =_\beta \ulcorner f(n_1, \dots, n_k) \urcorner$ si $f(n_1, \dots, n_k)$ défini

Une parenthèse: opérations arithmétiques

$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, f^n(x)$

But: $\ulcorner f \urcorner \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner$
$=_\beta \ulcorner f(n_1, \ldots, n_k) \urcorner$
si $f(n_1, \ldots, n_k)$ défini

- Toutes les opérations arithmétiques sont primitives récursives, mais on peut aussi les définir directement
- $\ulcorner + \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda z_1 \,.\, \lambda z_2 \,.\, \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, z_1 f(z_2 f x)$
  … ou $\lambda z_1 \,.\, \lambda z_2 \,.\, \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, z_2 f(z_1 f x)$
  … ou $\lambda z_1 \,.\, \lambda z_2 \,.\, z_1 \ulcorner \mathrm{S} \urcorner z_2$
  … ou $\lambda z_1 \,.\, z_1 \ulcorner \mathrm{S} \urcorner$ [**tous** β-inéquivalents!]

Une parenthèse: opérations arithmétiques

$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f \, . \, \lambda x \, . \, f^n(x)$

But: $\ulcorner f \urcorner \; \ulcorner n_1 \urcorner \; \ldots \; \ulcorner n_k \urcorner$
$=_\beta \ulcorner f(n_1, \ldots, n_k) \urcorner$
si $f(n_1, \ldots, n_k)$ défini

- Toutes les opérations arithmétiques sont primitives récursives, mais on peut aussi les définir directement
- $\ulcorner + \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda z_1 \, . \, \lambda z_2 \, . \, \lambda f \, . \, \lambda x \, . \, z_1 f(z_2 f x)$
  … ou $\lambda z_1 \, . \, \lambda z_2 \, . \, \lambda f \, . \, \lambda x \, . \, z_2 f(z_1 f x)$
  … ou $\lambda z_1 \, . \, \lambda z_2 \, . \, z_1 \ulcorner \mathrm{S} \urcorner z_2$
  … ou $\lambda z_1 \, . \, z_1 \ulcorner \mathrm{S} \urcorner$ [**tous** β-inéquivalents!]
- $\ulcorner \times \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda z_1 \, . \, \lambda z_2 \, . \, \lambda f \, . \, z_1(z_2 f)$ [… par exemple]

Une parenthèse: opérations arithmétiques

$\ulcorner n \urcorner \overset{\text{def}}{=} \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, f^n(x)$

But: $\ulcorner f \urcorner \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner$
$=_\beta \ulcorner f(n_1, \ldots, n_k) \urcorner$
si $f(n_1, \ldots, n_k)$ défini

- Toutes les opérations arithmétiques sont primitives récursives, mais on peut aussi les définir directement
- $\ulcorner + \urcorner \overset{\text{def}}{=} \lambda z_1 \,.\, \lambda z_2 \,.\, \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, z_1 f(z_2 f x)$
  … ou $\lambda z_1 \,.\, \lambda z_2 \,.\, \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, z_2 f(z_1 f x)$
  … ou $\lambda z_1 \,.\, \lambda z_2 \,.\, z_1 \ulcorner \mathrm{S} \urcorner z_2$
  … ou $\lambda z_1 \,.\, z_1 \ulcorner \mathrm{S} \urcorner$ [**tous** β-inéquivalents!]
- $\ulcorner \times \urcorner \overset{\text{def}}{=} \lambda z_1 \,.\, \lambda z_2 \,.\, \lambda f \,.\, z_1(z_2 f)$ [… par exemple]
- $\ulcorner \mathrm{pow} \urcorner \overset{\text{def}}{=} \lambda z_1 \,.\, \lambda z_2 \,.\, z_1 z_2$ [… ou juste $\lambda z \,.\, z$!]

Composition

composition: si $g_1, \ldots, g_k : \mathbf{N}^\ell \to \mathbf{N} \in \mathbf{Rec}$,
et $f : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N} \in \mathbf{Rec}$, alors
$f \circ \langle g_1, \ldots, g_k \rangle : \underline{m} \in \mathbf{N}^\ell \mapsto f(g_1(\underline{m}),\ldots,g_k(\underline{m}))$
est dans **Rec**

$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f . \lambda x . f^n(x)$

But: $\ulcorner f \urcorner \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner$
$=_\beta \ulcorner f(n_1, \ldots, n_k) \urcorner$
si $f(n_1, \ldots, n_k)$ défini

- $\ulcorner f \circ \langle g_1, \ldots, g_k \rangle \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda z_1 . \ldots . \lambda z_\ell .$
$\ulcorner f \urcorner (\ulcorner g_1 \urcorner z_1 \ldots z_\ell) \ldots (\ulcorner g_k \urcorner z_1 \ldots z_\ell)$

Composition

composition: si $g_1, \ldots, g_k : \mathbf{N}^\ell \to \mathbf{N} \in \mathbf{Rec}$,
et $f : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N} \in \mathbf{Rec}$, alors
$f \circ \langle g_1, \ldots, g_k \rangle : \underline{m} \in \mathbf{N}^\ell \mapsto f(g_1(\underline{m}), \ldots, g_k(\underline{m}))$
est dans **Rec**

$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f . \lambda x . f^n(x)$

But: $\ulcorner f \urcorner \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner$
$=_\beta \ulcorner f(n_1, \ldots, n_k) \urcorner$
si $f(n_1, \ldots, n_k)$ défini

- $\ulcorner f \circ \langle g_1, \ldots, g_k \rangle \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda z_1 . \ldots . \lambda z_\ell .$
  $\ulcorner f \urcorner (\ulcorner g_1 \urcorner z_1 \ldots z_\ell) \ldots (\ulcorner g_k \urcorner z_1 \ldots z_\ell)$
- La récurrence primitive et la minimisation sont beaucoup plus intéressantes… et nécessitent de petits détours

Détour 1: booléens

- Booléens de **Church**:
  $\ulcorner \text{vrai} \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda then\,.\,\lambda else\,.\,then$
  $\ulcorner \text{faux} \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda then\,.\,\lambda else\,.\,else$
- $\ulcorner \text{if} \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda test\,.\,\lambda then\,.\,\lambda else\,.\,test\ then\ else$
  (ou bien $\lambda test\,.\,test$!)

$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f\,.\,\lambda x\,.\,f^n(x)$

But: $\ulcorner f \urcorner\ \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner$
$=_\beta \ulcorner f(n_1, \ldots, n_k) \urcorner$
si $f(n_1, \ldots, n_k)$ défini

Détour 2: test à zéro

- Test d'égalité d'un entier à 0:
  $\ulcorner{=}0\urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda z\,.\,z\,(\lambda\,\_\,.\,\ulcorner\text{faux}\urcorner)\,\ulcorner\text{vrai}\urcorner$

$\ulcorner n\urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f\,.\,\lambda x\,.\,f^n(x)$

But: $\ulcorner f\urcorner\,\ulcorner n_1\urcorner \ldots \ulcorner n_k\urcorner$
$=_\beta \ulcorner f(n_1, \ldots, n_k)\urcorner$
si $f(n_1, \ldots, n_k)$ défini

Détour 2: test à zéro

- Test d'égalité d'un entier à 0:
  $\ulcorner{=}0\urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda z\,.\,z\,(\lambda\,\_\,.\,\ulcorner\text{faux}\urcorner)\,\ulcorner\text{vrai}\urcorner$
- $\ulcorner{=}0\urcorner\,\ulcorner 0\urcorner \to \ulcorner 0\urcorner\,(\lambda\,\_\,.\,\ulcorner\text{faux}\urcorner)\,\ulcorner\text{vrai}\urcorner$
  $\to (\lambda x\,.\,x)\,\ulcorner\text{vrai}\urcorner \to \ulcorner\text{vrai}\urcorner$

$\ulcorner n\urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f\,.\,\lambda x\,.\,f^n(x)$

But: $\ulcorner f\urcorner\,\ulcorner n_1\urcorner \ldots \ulcorner n_k\urcorner$
$=_\beta \ulcorner f(n_1, \ldots, n_k)\urcorner$
si $f(n_1, \ldots, n_k)$ défini

Détour 2: test à zéro

$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f . \lambda x . f^n(x)$

But: $\ulcorner f \urcorner \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner$
$=_\beta \ulcorner f(n_1, \ldots, n_k) \urcorner$
si $f(n_1, \ldots, n_k)$ défini

- Test d'égalité d'un entier à 0:
  $\ulcorner{=}0\urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda z . z\, (\lambda \_ . \ulcorner \text{faux} \urcorner)\, \ulcorner \text{vrai} \urcorner$
- $\ulcorner{=}0\urcorner\, \ulcorner 0 \urcorner \to \ulcorner 0 \urcorner\, (\lambda \_ . \ulcorner \text{faux} \urcorner)\, \ulcorner \text{vrai} \urcorner$
  $\to (\lambda x . x)\, \ulcorner \text{vrai} \urcorner \to \ulcorner \text{vrai} \urcorner$
- $\ulcorner{=}0\urcorner\, \ulcorner n{+}1 \urcorner \to \ulcorner n{+}1 \urcorner\, (\lambda \_ . \ulcorner \text{faux} \urcorner)\, \ulcorner \text{vrai} \urcorner$
  $\to^2 (\lambda \_ . \ulcorner \text{faux} \urcorner)^{n+1}\, \ulcorner \text{vrai} \urcorner$
  $= (\lambda \_ . \ulcorner \text{faux} \urcorner)\, ((\lambda \_ . \ulcorner \text{faux} \urcorner)^n\, \ulcorner \text{vrai} \urcorner)$
  $\to \ulcorner \text{faux} \urcorner$

Détour 2: test à zéro

$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, f^n(x)$

But: $\ulcorner f \urcorner\ \ulcorner n_1 \urcorner \dots \ulcorner n_k \urcorner$
$=_\beta \ulcorner f(n_1, \dots, n_k) \urcorner$
si $f(n_1, \dots, n_k)$ défini

- Test d'égalité d'un entier à 0:
  $\ulcorner{=}0\urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda z \,.\, z\, (\lambda \_ \,.\, \ulcorner \mathrm{faux} \urcorner)\, \ulcorner \mathrm{vrai} \urcorner$
- $$\begin{aligned}\ulcorner{=}0\urcorner\ \ulcorner 0 \urcorner &\to \ulcorner 0 \urcorner\, (\lambda \_ \,.\, \ulcorner \mathrm{faux} \urcorner)\, \ulcorner \mathrm{vrai} \urcorner \\ &\to (\lambda x \,.\, x)\, \ulcorner \mathrm{vrai} \urcorner \to \ulcorner \mathrm{vrai} \urcorner\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\ulcorner{=}0\urcorner\ \ulcorner n{+}1 \urcorner &\to \ulcorner n{+}1 \urcorner\, (\lambda \_ \,.\, \ulcorner \mathrm{faux} \urcorner)\, \ulcorner \mathrm{vrai} \urcorner \\ &\to^2 (\lambda \_ \,.\, \ulcorner \mathrm{faux} \urcorner)^{n+1}\, \ulcorner \mathrm{vrai} \urcorner \\ &= (\lambda \_ \,.\, \ulcorner \mathrm{faux} \urcorner)\, ((\lambda \_ \,.\, \ulcorner \mathrm{faux} \urcorner)^{n}\, \ulcorner \mathrm{vrai} \urcorner) \\ &\to \ulcorner \mathrm{faux} \urcorner\end{aligned}$$
- Le terme réellement difficile à trouver, c'est le **prédécesseur**

Détour 3: couples

- Formation de couples:
  $\ulcorner \text{pair} \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda z_1 . \lambda z_2 . \lambda p . p z_1 z_2$
  $\ulcorner \text{pair} \urcorner uv \to^2 \langle u,v \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \lambda p . puv$

$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f . \lambda x . f^n(x)$

But: $\ulcorner f \urcorner \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner$
$=_\beta \ulcorner f(n_1, \ldots, n_k) \urcorner$
si $f(n_1, \ldots, n_k)$ défini

Détour 3: couples

$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, f^n(x)$

But: $\ulcorner f \urcorner \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner$
$=_\beta \ulcorner f(n_1, \ldots, n_k) \urcorner$
si $f(n_1, \ldots, n_k)$ défini

- Formation de couples:
  $\ulcorner \text{pair} \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda z_1 \,.\, \lambda z_2 \,.\, \lambda p \,.\, p z_1 z_2$
  $\ulcorner \text{pair} \urcorner uv \to^2 \langle u,v \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \lambda p \,.\, puv$
- Projections:
  $\ulcorner \text{p}_1 \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda c \,.\, c(\lambda z_1 \,.\, \lambda z_2 \,.\, z_1)$ (oui, $= \lambda c \,.\, c \ulcorner \text{vrai} \urcorner$)
  $\ulcorner \text{p}_2 \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda c \,.\, c(\lambda z_1 \,.\, \lambda z_2 \,.\, z_2)$ (oui, $= \lambda c \,.\, c \ulcorner \text{faux} \urcorner$)

Détour 3: couples

$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, f^n(x)$

But: $\ulcorner f \urcorner \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner$
$=_\beta \ulcorner f(n_1, \ldots, n_k) \urcorner$
si $f(n_1, \ldots, n_k)$ défini

- Formation de couples:
  $\ulcorner \mathrm{pair} \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda z_1 \,.\, \lambda z_2 \,.\, \lambda p \,.\, p z_1 z_2$
  $\ulcorner \mathrm{pair} \urcorner uv \to^2 \langle u,v \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \lambda p \,.\, puv$
- Projections:
  $\ulcorner \mathrm{p}_1 \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda c \,.\, c(\lambda z_1 \,.\, \lambda z_2 \,.\, z_1)$ (oui, $= \lambda c \,.\, c \ulcorner \mathrm{vrai} \urcorner$)
  $\ulcorner \mathrm{p}_2 \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda c \,.\, c(\lambda z_1 \,.\, \lambda z_2 \,.\, z_2)$ (oui, $= \lambda c \,.\, c \ulcorner \mathrm{faux} \urcorner$)
- $\ulcorner \mathrm{p}_1 \urcorner \langle u,v \rangle \to \langle u,v \rangle (\lambda z_1 \,.\, \lambda z_2 \,.\, z_1) \to (\lambda z_1 \,.\, \lambda z_2 \,.\, z_1) uv \to^2 u$
  $\ulcorner \mathrm{p}_2 \urcorner \langle u,v \rangle \to \langle u,v \rangle (\lambda z_1 \,.\, \lambda z_2 \,.\, z_2) \to (\lambda z_1 \,.\, \lambda z_2 \,.\, z_2) uv \to^2 v$

Détour 4: prédécesseur

- Soit $\mathrm{P}(n) \stackrel{\text{def}}{=} n{-}1$ si $n{\geq}1$,
  0 si $n{=}0$ **(prédécesseur)**

$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, f^n(x)$

But: $\ulcorner f \urcorner \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner$
$=_\beta \ulcorner f(n_1, \ldots, n_k) \urcorner$
si $f(n_1, \ldots, n_k)$ défini

Détour 4: prédécesseur

$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, f^n(x)$

But: $\ulcorner f \urcorner \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner$
$=_\beta \ulcorner f(n_1, \ldots, n_k) \urcorner$
si $f(n_1, \ldots, n_k)$ défini

- Soit $\mathrm{P}(n) \stackrel{\text{def}}{=} n-1$ si $n \geq 1$,
  0 si $n=0$ **(prédécesseur)**
- Idée de codage:
  $c := \langle 0,0 \rangle$; répéter n fois: remplacer $\langle m,m' \rangle$ par $\langle m+1,m \rangle$
  Ainsi c passe par $\langle 0,0 \rangle$, $\langle 1,0 \rangle$, $\langle 2,1 \rangle$, …, $\langle n,n-1 \rangle$ (si $n \geq 1$)
  Finalement, prendre la 2ème projection.

Détour 4: prédécesseur

$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, f^n(x)$

But: $\ulcorner f \urcorner \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner$
$=_\beta \ulcorner f(n_1, \ldots, n_k) \urcorner$
si $f(n_1, \ldots, n_k)$ défini

- Soit $\mathrm{P}(n) \stackrel{\text{def}}{=} n-1$ si $n \geq 1$,
  0 si $n=0$ **(prédécesseur)**
- Idée de codage:
  $c := \langle 0,0 \rangle$; répéter n fois: remplacer $\langle m,m' \rangle$ par $\langle m+1,m \rangle$
  Ainsi c passe par $\langle 0,0 \rangle$, $\langle 1,0 \rangle$, $\langle 2,1 \rangle$, …, $\langle n,n-1 \rangle$ (si $n \geq 1$)
  Finalement, prendre la 2ème projection.
- $\ulcorner \mathrm{P} \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda z \,.\, \ulcorner \mathrm{p}_2 \urcorner (z(\lambda c \,.\, \langle \ulcorner \mathrm{S} \urcorner (\ulcorner \mathrm{p}_1 \urcorner c), \ulcorner \mathrm{p}_1 \urcorner c \rangle) \langle \ulcorner 0 \urcorner, \ulcorner 0 \urcorner \rangle)$
  Vérification: exercice!

`letrec` et points fixes

$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, f^n(x)$

But: $\ulcorner f \urcorner \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner$
$=_\beta \ulcorner f(n_1, \ldots, n_k) \urcorner$
si $f(n_1, \ldots, n_k)$ défini

`letrec` et points fixes

- On va coder la récurrence primitive $R_{f,g}$ par:
  `letrec` $R_{f,g}(z,\underline{m})=$ (informellement)
  if $z=0$ then $f(\underline{m})$
  else $g(\mathrm{P}(z), R_{f,g}(\mathrm{P}(z),\underline{m}), \underline{m})$

$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f\,.\,\lambda x\,.\,f^n(x)$

But: $\ulcorner f \urcorner\ \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner =_\beta \ulcorner f(n_1, \ldots, n_k) \urcorner$ si $f(n_1, \ldots, n_k)$ défini

`letrec` et points fixes

- On va coder la récurrence primitive $R_{f,g}$ par:
  `letrec` $R_{f,g}(z,\underline{m})=$ (informellement)
  if $z=0$ then $f(\underline{m})$
  else $g(P(z), R_{f,g}(P(z),\underline{m}), \underline{m})$

$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, f^n(x)$

But: $\ulcorner f \urcorner \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner =_\beta \ulcorner f(n_1, \ldots, n_k) \urcorner$ si $f(n_1, \ldots, n_k)$ défini

- On a tout (if, =0, P, composition)… reste `letrec`

`letrec` et points fixes

$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, f^n(x)$

But: $\ulcorner f \urcorner \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner =_\beta \ulcorner f(n_1, \ldots, n_k) \urcorner$ si $f(n_1, \ldots, n_k)$ défini

- On va coder la récurrence primitive $R_{f,g}$ par:
  `letrec` $R_{f,g}(z,\underline{m})=$ (informellement)
  if $z=0$ then $f(\underline{m})$
  else $g(\mathrm{P}(z), R_{f,g}(\mathrm{P}(z),\underline{m}), \underline{m})$
- On a tout (if, =0, P, composition)… reste `letrec`
- `letrec` $f(\underline{z}) = e(f,\underline{z})$, c'est trouver f tel que $f =_\beta \lambda \underline{z} \,.\, e(f,\underline{z})$

`letrec` et points fixes

$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, f^n(x)$

But: $\ulcorner f \urcorner \ \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner$
$=_\beta \ulcorner f(n_1, \ldots, n_k) \urcorner$
si $f(n_1, \ldots, n_k)$ défini

- On va coder la récurrence primitive $R_{f,g}$ par:
  `letrec` $R_{f,g}(z,\underline{m})=$ (informellement)
  if $z=0$ then $f(\underline{m})$
  else $g(\mathrm{P}(z), R_{f,g}(\mathrm{P}(z),\underline{m}), \underline{m})$
- On a tout (if, =0, P, composition)… reste `letrec`
- `letrec` $f(\underline{z}) = e(f,\underline{z})$, c'est trouver f tel que $f =_\beta \lambda \underline{z} \,.\, e(f,\underline{z})$
- autrement dit un **point fixe** de $\lambda f \,.\, \lambda \underline{z} \,.\, e(f,\underline{z})$ (mod $=_\beta$)

Points fixes

- **Proposition. Tout** λ-terme u a un point fixe $\mathrm{Y}u$ mod $=_\beta$ (i.e., $u(\mathrm{Y}u) =_\beta \mathrm{Y}u$).

$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, f^n(x)$

But: $\ulcorner f \urcorner\ \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner$
$=_\beta \ulcorner f(n_1, \ldots, n_k) \urcorner$
si $f(n_1, \ldots, n_k)$ défini

Points fixes

- **Proposition. Tout** λ-terme u a un point fixe $\mathrm{Y}u$ mod $=_\beta$ (i.e., $u(\mathrm{Y}u) =_\beta \mathrm{Y}u$).
- En fait, il existe un λ-terme clos Y tel que, pour tout λ-terme u, $u(\mathrm{Y}u) =_\beta \mathrm{Y}u$.

$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, f^n(x)$

But: $\ulcorner f \urcorner \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner =_\beta \ulcorner f(n_1, \ldots, n_k) \urcorner$ si $f(n_1, \ldots, n_k)$ défini

Points fixes

un **combinateur**
(de point fixe, ici)

$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, f^n(x)$

But: $\ulcorner f \urcorner \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner =_\beta \ulcorner f(n_1, \ldots, n_k) \urcorner$ si $f(n_1, \ldots, n_k)$ défini

- **Proposition. Tout** λ-terme u a un point fixe $\mathrm{Y}u$ mod $=_\beta$ (i.e., $u(\mathrm{Y}u) =_\beta \mathrm{Y}u$).
- En fait, il existe un λ-terme clos Y tel que, pour tout λ-terme u, $u(\mathrm{Y}u) =_\beta \mathrm{Y}u$.

Points fixes

un **combinateur**
(de point fixe, ici)

$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f . \lambda x . f^n(x)$

But: $\ulcorner f \urcorner \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner$
$=_\beta \ulcorner f(n_1, \ldots, n_k) \urcorner$
si $f(n_1, \ldots, n_k)$ défini

- **Proposition. Tout** λ-terme u a un point fixe $\mathrm{Y}u$ mod $=_\beta$ (i.e., $u(\mathrm{Y}u) =_\beta \mathrm{Y}u$).
- En fait, il existe un λ-terme clos Y tel que, pour tout λ-terme u, $u(\mathrm{Y}u) =_\beta \mathrm{Y}u$.
- Combinateur de point fixe… **de Church** [surprise!]

$$\mathrm{Y} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f . (\lambda x . f(xx)) (\lambda x . f(xx))$$

Points fixes

un **combinateur**
(de point fixe, ici)

$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, f^n(x)$

But: $\ulcorner f \urcorner \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner$
$=_\beta \ulcorner f(n_1, \ldots, n_k) \urcorner$
si $f(n_1, \ldots, n_k)$ défini

- **Proposition. Tout** λ-terme u a un point fixe $\mathrm{Y}u$ mod $=_\beta$ (i.e., $u(\mathrm{Y}u) =_\beta \mathrm{Y}u$).
- En fait, il existe un λ-terme clos Y tel que, pour tout λ-terme u, $u(\mathrm{Y}u) =_\beta \mathrm{Y}u$.
- Combinateur de point fixe… **de Church** [surprise!]

$$\mathrm{Y} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f \,.\, (\lambda x \,.\, f(xx))\, (\lambda x \,.\, f(xx))$$

- $\mathrm{Y}u \to (\lambda x \,.\, u(xx))\, \underbrace{(\lambda x \,.\, u(xx))}_{A_u}$ [x fraîche, $\notin \mathrm{fv}(u)$]

$$\to u\,(A_u\, A_u)$$
$$\leftarrow u(\mathrm{Y}u)$$

Points fixes

- **Proposition. Tout** λ-terme u a un point fixe $\mathrm{Y}u$ mod $=_\beta$ (i.e., $u(\mathrm{Y}u) =_\beta \mathrm{Y}u$).
- En fait, il existe un λ-terme clos Y tel que, pour tout λ-terme u, $u(\mathrm{Y}u) =_\beta \mathrm{Y}u$.

$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, f^n(x)$

But: $\ulcorner f \urcorner \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner =_\beta \ulcorner f(n_1, \ldots, n_k) \urcorner$ si $f(n_1, \ldots, n_k)$ défini

- Il y en a d'autres: le combinateur de point fixe **de Turing**

$$\Theta \stackrel{\text{def}}{=} AA, \text{ où } A \stackrel{\text{def}}{=} \lambda g \,.\, \lambda h \,.\, h(ggh)$$

Points fixes

$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f . \lambda x . f^n(x)$

But: $\ulcorner f \urcorner \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner$
$=_\beta \ulcorner f(n_1, \ldots, n_k) \urcorner$
si $f(n_1, \ldots, n_k)$ défini

- **Proposition. Tout** λ-terme u a un point fixe $\mathrm{Y}u$ mod $=_\beta$ (i.e., $u(\mathrm{Y}u) =_\beta \mathrm{Y}u$).
- En fait, il existe un λ-terme clos Y tel que, pour tout λ-terme u, $u(\mathrm{Y}u) =_\beta \mathrm{Y}u$.
- Il y en a d'autres: le combinateur de point fixe **de Turing**

$$\Theta \stackrel{\text{def}}{=} AA, \text{ où } A \stackrel{\text{def}}{=} \lambda g . \lambda h . h(ggh)$$

- $\Theta u = (\lambda g . \lambda h . h(ggh))\, A\, u$

  $\to^2 u(AAu) = u(\Theta u)$ [le sens de réduction est le bon!]

Récurrence primitive

récurrence primitive: si $f : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N}$
et $g : \mathbf{N}^{k+2} \to \mathbf{N} \in \mathbf{Rec}$,
alors $R_{f,g} : \mathbf{N}^{k+1} \to \mathbf{N} \in \mathbf{Rec}$, où
$R_{f,g}(0, \underline{m}) \stackrel{\text{def}}{=} f(\underline{m})$
$R_{f,g}(n+1, \underline{m}) \stackrel{\text{def}}{=} g(n, R_{f,g}(n, \underline{m}), \underline{m})$

$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f . \lambda x . f^n(x)$

But: $\ulcorner f \urcorner \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner$
$=_\beta \ulcorner f(n_1, \ldots, n_k) \urcorner$
si $f(n_1, \ldots, n_k)$ défini

- $\ulcorner R_{f,g} \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} Y(\lambda R . \lambda z . \lambda z_1 . \ldots . \lambda z_k .$
  $\ulcorner \mathrm{if} \urcorner (\ulcorner {=}0 \urcorner z)$
  $(\ulcorner f \urcorner z_1 \ldots z_k)$
  $(\ulcorner g \urcorner (\ulcorner \mathrm{P} \urcorner z) (R (\ulcorner \mathrm{P} \urcorner z) z_1 \ldots z_k) z_1 \ldots z_k))$

Récurrence primitive

récurrence primitive: si $f : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N}$
et $g : \mathbf{N}^{k+2} \to \mathbf{N} \in \mathbf{Rec}$,
alors $R_{f,g} : \mathbf{N}^{k+1} \to \mathbf{N} \in \mathbf{Rec}$, où

$$R_{f,g}(0, \underline{m}) \stackrel{\text{def}}{=} f(\underline{m})$$
$$R_{f,g}(n+1, \underline{m}) \stackrel{\text{def}}{=} g(n, R_{f,g}(n, \underline{m}), \underline{m})$$

$$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, f^n(x)$$

But: $\ulcorner f \urcorner \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner$
$=_\beta \ulcorner f(n_1, \ldots, n_k) \urcorner$
si $f(n_1, \ldots, n_k)$ défini

- $\ulcorner R_{f,g} \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Y}(\lambda R \,.\, \lambda z \,.\, \lambda z_1 \,.\, \ldots \,.\, \lambda z_k \,.$
$\quad \ulcorner \mathrm{if} \urcorner\ (\ulcorner {=}0 \urcorner\ z)$
$\quad\quad (\ulcorner f \urcorner\ z_1 \ldots z_k)$
$\quad\quad (\ulcorner g \urcorner\ (\ulcorner \mathrm{P} \urcorner\ z)\ (R\ (\ulcorner \mathrm{P} \urcorner\ z)\ z_1 \ldots z_k)\ z_1 \ldots z_k))$

- $\ulcorner R_{f,g} \urcorner\ \ulcorner 0 \urcorner\ u_1 \ldots u_k =_\beta \ulcorner f \urcorner\ u_1 \ldots u_k$
$\ulcorner R_{f,g} \urcorner\ \ulcorner n{+}1 \urcorner\ u_1 \ldots u_k =_\beta \ulcorner g \urcorner\ \ulcorner n \urcorner\ (\ulcorner R_{f,g} \urcorner\ \ulcorner n \urcorner\ u_1 \ldots u_k)\ u_1 \ldots u_k$
(exercice… ou voir transparents suivants)

Le récurseur

$$
\begin{aligned}
\ulcorner R_{f,g} \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Y}(\lambda R\,.\,\lambda z\,.\,\lambda z_1\,.\,\ldots\,.\,\lambda z_k\,.\\
&\ulcorner \mathrm{if} \urcorner\ (\ulcorner {=}0 \urcorner\ z)\\
&\quad (\ulcorner f \urcorner\ z_1 \ldots z_k)\\
&\quad (\ulcorner g \urcorner\ (\ulcorner \mathrm{P} \urcorner\ z)\ (R\ (\ulcorner \mathrm{P} \urcorner\ z)\ z_1 \ldots z_k)\ z_1 \ldots z_k))
\end{aligned}
$$

- **Fait.** $\ulcorner R_{f,g} \urcorner\ \ulcorner 0 \urcorner\ u_1 \ldots u_k =_\beta \ulcorner f \urcorner\ u_1 \ldots u_k$

Le récurseur

$$\ulcorner R_{f,g} \urcorner \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{Y}(\lambda R \,.\, \lambda z \,.\, \lambda z_1 \,.\, \ldots \,.\, \lambda z_k \,.$$
$$\ulcorner \mathrm{if} \urcorner \; (\ulcorner {=}0 \urcorner \; z)$$
$$(\ulcorner f \urcorner \; z_1 \ldots z_k)$$
$$(\ulcorner g \urcorner \; (\ulcorner \mathrm{P} \urcorner \; z) \; (R \; (\ulcorner \mathrm{P} \urcorner \; z) \; z_1 \ldots z_k) \; z_1 \ldots z_k))$$

- **Fait.** $\ulcorner R_{f,g} \urcorner \; \ulcorner 0 \urcorner \; u_1 \ldots u_k =_\beta \ulcorner f \urcorner \; u_1 \ldots u_k$
- $\ulcorner R_{f,g} \urcorner \; \ulcorner 0 \urcorner \; u_1 \ldots u_k =_\beta (\lambda R \,.\, \ldots) \; \ulcorner R_{f,g} \urcorner \; \ulcorner 0 \urcorner \; u_1 \ldots u_k$ (déf. de Y)

Le récurseur

$$\ulcorner R_{f,g} \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} Y(\lambda R\,.\,\lambda z\,.\,\lambda z_1\,.\,\ldots\,.\,\lambda z_k\,.$$
$$\ulcorner \text{if} \urcorner\ (\ulcorner {=}0 \urcorner\ z)$$
$$(\ulcorner f \urcorner\ z_1 \ldots z_k)$$
$$(\ulcorner g \urcorner\ (\ulcorner \mathrm{P} \urcorner\ z)\ (R\ (\ulcorner \mathrm{P} \urcorner\ z)\ z_1 \ldots z_k)\ z_1 \ldots z_k))$$

- **Fait.** $\ulcorner R_{f,g} \urcorner\ \ulcorner 0 \urcorner\ u_1 \ldots u_k =_\beta \ulcorner f \urcorner\ u_1 \ldots u_k$
- $\ulcorner R_{f,g} \urcorner\ \ulcorner 0 \urcorner\ u_1 \ldots u_k =_\beta (\lambda R\,.\,\ldots)\ \ulcorner R_{f,g} \urcorner\ \ulcorner 0 \urcorner\ u_1 \ldots u_k$ (déf. de Y)
- $\to^* \ulcorner \text{if} \urcorner\ (\ulcorner {=}0 \urcorner\ \ulcorner 0 \urcorner)$
  $(\ulcorner f \urcorner\ u_1 \ldots u_k)$
  $(\ulcorner g \urcorner\ (\ulcorner \mathrm{P} \urcorner\ \ulcorner 0 \urcorner)\ (\ulcorner R_{f,g} \urcorner\ (\ulcorner \mathrm{P} \urcorner\ \ulcorner 0 \urcorner)\ u_1 \ldots u_k)\ u_1 \ldots u_k))$

Le récurseur

$$\ulcorner R_{f,g} \urcorner \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{Y}(\lambda R \,.\, \lambda z \,.\, \lambda z_1 \,.\, \ldots \,.\, \lambda z_k \,.\, \ulcorner \mathrm{if} \urcorner\, (\ulcorner {=}0 \urcorner\, z)\, (\ulcorner f \urcorner\, z_1 \ldots z_k)\, (\ulcorner g \urcorner\, (\ulcorner \mathrm{P} \urcorner\, z)\, (R\, (\ulcorner \mathrm{P} \urcorner\, z)\, z_1 \ldots z_k)\, z_1 \ldots z_k))$$

- **Fait.** $\ulcorner R_{f,g} \urcorner\, \ulcorner 0 \urcorner\, u_1 \ldots u_k =_\beta \ulcorner f \urcorner\, u_1 \ldots u_k$
- $\ulcorner R_{f,g} \urcorner\, \ulcorner 0 \urcorner\, u_1 \ldots u_k =_\beta (\lambda R \,.\, \ldots)\, \ulcorner R_{f,g} \urcorner\, \ulcorner 0 \urcorner\, u_1 \ldots u_k$ (déf. de Y)
- $\to^* \ulcorner \mathrm{if} \urcorner\, (\ulcorner {=}0 \urcorner\, \ulcorner 0 \urcorner)\, (\ulcorner f \urcorner\, u_1 \ldots u_k)\, (\ulcorner g \urcorner\, (\ulcorner \mathrm{P} \urcorner\, \ulcorner 0 \urcorner)\, (\ulcorner R_{f,g} \urcorner\, (\ulcorner \mathrm{P} \urcorner\, \ulcorner 0 \urcorner)\, u_1 \ldots u_k)\, u_1 \ldots u_k))$

Or $\ulcorner {=}0 \urcorner\, \ulcorner 0 \urcorner \to^* \ulcorner \mathrm{vrai} \urcorner$
et $\ulcorner \mathrm{if} \urcorner\, \ulcorner \mathrm{vrai} \urcorner\, \mathrm{T}\, \mathrm{E} \to^* \mathrm{T}$

Le récurseur

$$\ulcorner R_{f,g} \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} Y(\lambda R \,.\, \lambda z \,.\, \lambda z_1 \,.\, \ldots \,.\, \lambda z_k \,.\\
\quad \ulcorner \mathrm{if} \urcorner \, (\ulcorner {=}0 \urcorner \, z)\\
\quad\quad (\ulcorner f \urcorner \, z_1 \ldots z_k)\\
\quad\quad (\ulcorner g \urcorner \, (\ulcorner \mathrm{P} \urcorner \, z) \, (R \, (\ulcorner \mathrm{P} \urcorner \, z) \, z_1 \ldots z_k) \, z_1 \ldots z_k))$$

- **Fait.** $\ulcorner R_{f,g} \urcorner \, \ulcorner 0 \urcorner \, u_1 \ldots u_k =_\beta \ulcorner f \urcorner \, u_1 \ldots u_k$
- $\ulcorner R_{f,g} \urcorner \, \ulcorner 0 \urcorner \, u_1 \ldots u_k =_\beta (\lambda R \,.\, \ldots) \, \ulcorner R_{f,g} \urcorner \, \ulcorner 0 \urcorner \, u_1 \ldots u_k$ (déf. de Y)
- $\to^* \ulcorner \mathrm{if} \urcorner \, (\ulcorner {=}0 \urcorner \, \ulcorner 0 \urcorner)$
  $(\ulcorner f \urcorner \, u_1 \ldots u_k)$
  $(\ulcorner g \urcorner \, (\ulcorner \mathrm{P} \urcorner \, \ulcorner 0 \urcorner) \, (\ulcorner R_{f,g} \urcorner \, (\ulcorner \mathrm{P} \urcorner \, \ulcorner 0 \urcorner) \, u_1 \ldots u_k) \, u_1 \ldots u_k))$

  Or $\ulcorner {=}0 \urcorner \, \ulcorner 0 \urcorner \to^* \ulcorner \mathrm{vrai} \urcorner$
  et $\ulcorner \mathrm{if} \urcorner \, \ulcorner \mathrm{vrai} \urcorner \, \mathrm{T} \, \mathrm{E} \to^* \mathrm{T}$
- $\to^* (\ulcorner f \urcorner \, u_1 \ldots u_k)$

Le récurseur

$$\begin{aligned}\ulcorner R_{f,g}\urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Y}(\lambda R\,.\,\lambda z\,.\,\lambda z_1\,.\,\dots\,.\,\lambda z_k\,.\\ \ulcorner \mathrm{if}\urcorner\,(\ulcorner{=}0\urcorner\,z)\\ (\ulcorner f\urcorner\,z_1\,\dots\,z_k)\\ (\ulcorner g\urcorner\,(\ulcorner \mathrm{P}\urcorner\,z)\,(R\,(\ulcorner \mathrm{P}\urcorner\,z)\,z_1\,\dots\,z_k)\,z_1\,\dots\,z_k))\end{aligned}$$

- **Fait.** $\ulcorner R_{f,g}\urcorner\,\ulcorner n{+}1\urcorner\,u_1\,\dots\,u_k =_\beta \ulcorner g\urcorner\,\ulcorner n\urcorner\,(\ulcorner R_{f,g}\urcorner\,\ulcorner n\urcorner\,u_1\,\dots\,u_k)\,u_1\,\dots\,u_k$

Le récurseur

$$\ulcorner R_{f,g} \urcorner \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{Y}(\lambda R \,.\, \lambda z \,.\, \lambda z_1 \,.\, \ldots \,.\, \lambda z_k \,.$$
$$\ulcorner \mathrm{if} \urcorner \; (\ulcorner {=}0 \urcorner \; z)$$
$$(\ulcorner f \urcorner \; z_1 \ldots z_k)$$
$$(\ulcorner g \urcorner \; (\ulcorner \mathrm{P} \urcorner \; z) \; (R \; (\ulcorner \mathrm{P} \urcorner \; z) \; z_1 \ldots z_k) \; z_1 \ldots z_k))$$

- **Fait.** $\ulcorner R_{f,g} \urcorner \; \ulcorner n{+}1 \urcorner \; u_1 \ldots u_k =_\beta \ulcorner g \urcorner \; \ulcorner n \urcorner \; (\ulcorner R_{f,g} \urcorner \; \ulcorner n \urcorner \; u_1 \ldots u_k) \; u_1 \ldots u_k$
- $\ulcorner R_{f,g} \urcorner \; \ulcorner n{+}1 \urcorner \; u_1 \ldots u_k =_\beta (\lambda R \,.\, \ldots) \; \ulcorner R_{f,g} \urcorner \; \ulcorner n{+}1 \urcorner \; u_1 \ldots u_k$ (déf. de Y)

Le récurseur

$$\ulcorner R_{f,g} \urcorner \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{Y}(\lambda R \,.\, \lambda z \,.\, \lambda z_1 \,.\, \ldots \,.\, \lambda z_k \,.\,$$
$$\ulcorner \text{if} \urcorner \, (\ulcorner {=}0 \urcorner \; z)$$
$$(\ulcorner f \urcorner \; z_1 \ldots z_k)$$
$$(\ulcorner g \urcorner \; (\ulcorner \mathrm{P} \urcorner \; z) \; (R \; (\ulcorner \mathrm{P} \urcorner \; z) \; z_1 \ldots z_k) \; z_1 \ldots z_k))$$

- **Fait.** $\ulcorner R_{f,g} \urcorner \; \ulcorner n{+}1 \urcorner \; u_1 \ldots u_k =_\beta \ulcorner g \urcorner \; \ulcorner n \urcorner \; (\ulcorner R_{f,g} \urcorner \; \ulcorner n \urcorner \; u_1 \ldots u_k) \; u_1 \ldots u_k$
- $\ulcorner R_{f,g} \urcorner \; \ulcorner n{+}1 \urcorner \; u_1 \ldots u_k =_\beta (\lambda R \,.\, \ldots) \; \ulcorner R_{f,g} \urcorner \; \ulcorner n{+}1 \urcorner \; u_1 \ldots u_k$ (déf. de Y)
- $\to^* \ulcorner \text{if} \urcorner \, (\ulcorner {=}0 \urcorner \; \ulcorner n{+}1 \urcorner)$
  $(\ulcorner f \urcorner \; u_1 \ldots u_k)$
  $(\ulcorner g \urcorner \; (\ulcorner \mathrm{P} \urcorner \; \ulcorner n{+}1 \urcorner) \; (\ulcorner R_{f,g} \urcorner \; (\ulcorner \mathrm{P} \urcorner \; \ulcorner n{+}1 \urcorner) \; u_1 \ldots u_k) \; u_1 \ldots u_k))$

Le récurseur

$$\ulcorner R_{f,g} \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} Y(\lambda R \,.\, \lambda z \,.\, \lambda z_1 \,.\, \dots \,.\, \lambda z_k \,.$$
$$\ulcorner \text{if} \urcorner\ (\ulcorner {=}0 \urcorner\ z)$$
$$(\ulcorner f \urcorner\ z_1 \dots z_k)$$
$$(\ulcorner g \urcorner\ (\ulcorner \text{P} \urcorner\ z)\ (R\ (\ulcorner \text{P} \urcorner\ z)\ z_1 \dots z_k)\ z_1 \dots z_k))$$

- **Fait.** $\ulcorner R_{f,g} \urcorner\ \ulcorner n{+}1 \urcorner\ u_1 \dots u_k =_\beta \ulcorner g \urcorner\ \ulcorner n \urcorner\ (\ulcorner R_{f,g} \urcorner\ \ulcorner n \urcorner\ u_1 \dots u_k)\ u_1 \dots u_k$
- $\ulcorner R_{f,g} \urcorner\ \ulcorner n{+}1 \urcorner\ u_1 \dots u_k =_\beta (\lambda R \,.\, \dots)\ \ulcorner R_{f,g} \urcorner\ \ulcorner n{+}1 \urcorner\ u_1 \dots u_k$ (déf. de Y)
- $\to^* \ulcorner \text{if} \urcorner\ (\ulcorner {=}0 \urcorner\ \ulcorner n{+}1 \urcorner)$
  $(\ulcorner f \urcorner\ u_1 \dots u_k)$
  $(\ulcorner g \urcorner\ (\ulcorner \text{P} \urcorner\ \ulcorner n{+}1 \urcorner)\ (\ulcorner R_{f,g} \urcorner\ (\ulcorner \text{P} \urcorner\ \ulcorner n{+}1 \urcorner)\ u_1 \dots u_k)\ u_1 \dots u_k))$

Or $\ulcorner {=}0 \urcorner\ \ulcorner n{+}1 \urcorner \to^* \ulcorner \text{faux} \urcorner$
et $\ulcorner \text{if} \urcorner\ \ulcorner \text{faux} \urcorner\ \text{T E} \to^* \text{E}$

Le récurseur

$$\ulcorner R_{f,g} \urcorner \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{Y}(\lambda R\,.\,\lambda z\,.\,\lambda z_1\,.\,\ldots\,.\,\lambda z_k\,.$$
$$\ulcorner \mathrm{if} \urcorner\,(\ulcorner =0 \urcorner\, z)$$
$$(\ulcorner f \urcorner\, z_1 \ldots z_k)$$
$$(\ulcorner g \urcorner\,(\ulcorner \mathrm{P} \urcorner\, z)\,(R\,(\ulcorner \mathrm{P} \urcorner\, z)\, z_1 \ldots z_k)\, z_1 \ldots z_k))$$

- **Fait.** $\ulcorner R_{f,g} \urcorner\, \ulcorner n{+}1 \urcorner\, u_1 \ldots u_k =_\beta \ulcorner g \urcorner\, \ulcorner n \urcorner\, (\ulcorner R_{f,g} \urcorner\, \ulcorner n \urcorner\, u_1 \ldots u_k)\, u_1 \ldots u_k$
- $\ulcorner R_{f,g} \urcorner\, \ulcorner n{+}1 \urcorner\, u_1 \ldots u_k =_\beta (\lambda R\,.\,\ldots)\, \ulcorner R_{f,g} \urcorner\, \ulcorner n{+}1 \urcorner\, u_1 \ldots u_k$ (déf. de Y)
- $\to^* \ulcorner \mathrm{if} \urcorner\,(\ulcorner =0 \urcorner\, \ulcorner n{+}1 \urcorner)$
  $(\ulcorner f \urcorner\, u_1 \ldots u_k)$
  $(\ulcorner g \urcorner\,(\ulcorner \mathrm{P} \urcorner\, \ulcorner n{+}1 \urcorner)\,(\ulcorner R_{f,g} \urcorner\,(\ulcorner \mathrm{P} \urcorner\, \ulcorner n{+}1 \urcorner)\, u_1 \ldots u_k)\, u_1 \ldots u_k))$

Or $\ulcorner =0 \urcorner\, \ulcorner n{+}1 \urcorner \to^* \ulcorner \mathrm{faux} \urcorner$
et $\ulcorner \mathrm{if} \urcorner\, \ulcorner \mathrm{faux} \urcorner\, \mathrm{T}\, \mathrm{E} \to^* \mathrm{E}$

Et $\ulcorner \mathrm{P} \urcorner\, \ulcorner n{+}1 \urcorner \to^* \ulcorner n \urcorner$

Le récurseur

$$\ulcorner R_{f,g} \urcorner \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{Y}(\lambda R \,.\, \lambda z \,.\, \lambda z_1 \,.\, \ldots \,.\, \lambda z_k \,.\, \ulcorner \mathrm{if} \urcorner\, (\ulcorner {=}0 \urcorner\, z)\, (\ulcorner f \urcorner\, z_1 \ldots z_k)\, (\ulcorner g \urcorner\, (\ulcorner \mathrm{P} \urcorner\, z)\, (R\, (\ulcorner \mathrm{P} \urcorner\, z)\, z_1 \ldots z_k)\, z_1 \ldots z_k))$$

- **Fait.** $\ulcorner R_{f,g} \urcorner\, \ulcorner n{+}1 \urcorner\, u_1 \ldots u_k =_\beta \ulcorner g \urcorner\, \ulcorner n \urcorner\, (\ulcorner R_{f,g} \urcorner\, \ulcorner n \urcorner\, u_1 \ldots u_k)\, u_1 \ldots u_k$
- $\ulcorner R_{f,g} \urcorner\, \ulcorner n{+}1 \urcorner\, u_1 \ldots u_k =_\beta (\lambda R \,.\, \ldots)\, \ulcorner R_{f,g} \urcorner\, \ulcorner n{+}1 \urcorner\, u_1 \ldots u_k$ (déf. de Y)
- $\to^* \ulcorner \mathrm{if} \urcorner\, (\ulcorner {=}0 \urcorner\, \ulcorner n{+}1 \urcorner)\, (\ulcorner f \urcorner\, u_1 \ldots u_k)\, (\ulcorner g \urcorner\, (\ulcorner \mathrm{P} \urcorner\, \ulcorner n{+}1 \urcorner)\, (\ulcorner R_{f,g} \urcorner\, (\ulcorner \mathrm{P} \urcorner\, \ulcorner n{+}1 \urcorner)\, u_1 \ldots u_k)\, u_1 \ldots u_k))$

  Or $\ulcorner {=}0 \urcorner\, \ulcorner n{+}1 \urcorner \to^* \ulcorner \mathrm{faux} \urcorner$ et $\ulcorner \mathrm{if} \urcorner\, \ulcorner \mathrm{faux} \urcorner\, \mathrm{T}\, \mathrm{E} \to^* \mathrm{E}$

  Et $\ulcorner \mathrm{P} \urcorner\, \ulcorner n{+}1 \urcorner \to^* \ulcorner n \urcorner$
- $\to^* (\ulcorner g \urcorner\, \ulcorner n \urcorner\, (\ulcorner R_{f,g} \urcorner \ulcorner n \urcorner\, u_1 \ldots u_k)\, u_1 \ldots u_k))$

Minimisation

minimisation: si $f : \mathbf{N}^{k+1} \to \mathbf{N} \in \mathbf{Rec}$, alors $\mu f : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N} \in \mathbf{Rec}$

- $\ulcorner \mu f \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda z_1 . \ldots . \lambda z_k .$
  $Y(\lambda search . \lambda z .$
  $\ulcorner \text{if} \urcorner (\ulcorner =0 \urcorner (\ulcorner f \urcorner\, z\, z_1 \ldots z_k))$
  z
  $search\, (\ulcorner S \urcorner\, z))$
  $\ulcorner 0 \urcorner$

« let $\mu f\, (\underline{m})$ =
letrec search z =
if $f(z,\underline{m})$=0 then z
else search $(z+1)$
in search 0 »

$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f . \lambda x . f^n(x)$

But: $\ulcorner f \urcorner\, \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner$
$=_\beta \ulcorner f(n_1, \ldots, n_k) \urcorner$
si $f(n_1, \ldots, n_k)$ défini

Minimisation

minimisation: si $f : \mathbf{N}^{k+1} \to \mathbf{N} \in \mathbf{Rec}$,
alors $\mu f : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N} \in \mathbf{Rec}$

« let $\mu f\,(\underline{m})$ =
letrec search z =
if $f(z,\underline{m})$=0 then z
else search (z+1)
in search 0 »

$\ulcorner n \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, f^n(x)$

But: $\ulcorner f \urcorner\ \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner$
$=_\beta \ulcorner f(n_1, \ldots, n_k) \urcorner$
si $f(n_1, \ldots, n_k)$ défini

- $\ulcorner \mu f \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda z_1 \,.\, \ldots \,.\, \lambda z_k \,.$
  $\mathrm{Y}(\lambda \mathit{search} \,.\, \lambda z \,.$
  $\ulcorner \mathrm{if} \urcorner\ (\ulcorner {=}0 \urcorner\ (\ulcorner f \urcorner\ z\ z_1 \ldots z_k))$
  z
  $\mathit{search}\ (\ulcorner \mathrm{S} \urcorner\ z))$
  $\ulcorner 0 \urcorner$

- Si $\ulcorner f \urcorner\ \ulcorner 0 \urcorner\ u_1 \ldots u_k =_\beta \ulcorner m_0 \urcorner, \ldots, \ulcorner f \urcorner\ \ulcorner n \urcorner\ u_1 \ldots u_k =_\beta \ulcorner m_n \urcorner$,
  avec $m_0, \ldots, m_{n-1}$ non nuls et m_n=0, alors
  $\ulcorner \mu f \urcorner\ u_1 \ldots u_k =_\beta \ulcorner n \urcorner$ (exercice… ou transparents suivants)

$$\begin{array}{l}\ulcorner\mu f\urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda z_1 . \ldots . \lambda z_k . \\ \quad Y(\lambda search . \lambda z . \\ \quad\quad \ulcorner\text{if}\urcorner\ (\ulcorner{=}0\urcorner\ (\ulcorner f\urcorner\ z\ z_1 \ldots z_k)) \\ \quad\quad\quad z \\ \quad\quad\quad search\ (\ulcorner S\urcorner\ z)) \\ \quad \ulcorner 0\urcorner\end{array}$$

La minimisation

- **Prop.** Si $\ulcorner f\urcorner\ \ulcorner 0\urcorner\ u_1 \ldots u_k =_\beta \ulcorner m_0\urcorner, \ldots, \ulcorner f\urcorner\ \ulcorner n\urcorner\ u_1 \ldots u_k =_\beta \ulcorner m_n\urcorner$,
avec $m_0, \ldots, m_{n-1}$ non nuls et $m_n=0$, alors
$\ulcorner\mu f\urcorner\ u_1 \ldots u_k =_\beta \ulcorner n\urcorner$.

La minimisation

$$\ulcorner \mu f \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda z_1 . \ldots . \lambda z_k .$$
$$\quad Y(\lambda search . \lambda z .$$
$$\quad\quad \ulcorner \text{if} \urcorner \, (\ulcorner {=}0 \urcorner \, (\ulcorner f \urcorner \, z \, z_1 \ldots z_k))$$
$$\quad\quad\quad z$$
$$\quad\quad\quad search \, (\ulcorner \mathrm{S} \urcorner \, z))$$
$$\quad \ulcorner 0 \urcorner$$

- **Prop.** Si $\ulcorner f \urcorner \ulcorner 0 \urcorner\, u_1 \ldots u_k =_\beta \ulcorner m_0 \urcorner, \ldots, \ulcorner f \urcorner \ulcorner n \urcorner\, u_1 \ldots u_k =_\beta \ulcorner m_n \urcorner$, avec $m_0, \ldots, m_{n-1}$ non nuls et $m_n{=}0$, alors $\ulcorner \mu f \urcorner\, u_1 \ldots u_k =_\beta \ulcorner n \urcorner$.
- Posons $F \stackrel{\text{def}}{=} Y(\lambda search . \lambda z .$
  $\ulcorner \text{if} \urcorner \, (\ulcorner {=}0 \urcorner \, (\ulcorner f \urcorner \, z \, u_1 \ldots u_k))$
  z
  $search \, (\ulcorner \mathrm{S} \urcorner \, z))$

La minimisation

$$\ulcorner \mu f \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda z_1 . \ldots . \lambda z_k .\; \mathrm{Y}(\lambda search . \lambda z .\; \ulcorner \mathrm{if} \urcorner\; (\ulcorner {=}0 \urcorner\; (\ulcorner f \urcorner\; z\; z_1 \ldots z_k))\; z\; search\; (\ulcorner \mathrm{S} \urcorner\; z))\; \ulcorner 0 \urcorner$$

- **Prop.** Si $\ulcorner f \urcorner\; \ulcorner 0 \urcorner\; u_1 \ldots u_k =_\beta \ulcorner m_0 \urcorner, \ldots, \ulcorner f \urcorner\; \ulcorner n \urcorner\; u_1 \ldots u_k =_\beta \ulcorner m_n \urcorner$, avec $m_0, \ldots, m_{n-1}$ non nuls et $m_n = 0$, alors $\ulcorner \mu f \urcorner\; u_1 \ldots u_k =_\beta \ulcorner n \urcorner$.

- Posons $F \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Y}(\lambda search . \lambda z .\; \ulcorner \mathrm{if} \urcorner\; (\ulcorner {=}0 \urcorner\; (\ulcorner f \urcorner\; z\; u_1 \ldots u_k))\; z\; search\; (\ulcorner \mathrm{S} \urcorner\; z))$

$$F\; \ulcorner i \urcorner =_\beta (\lambda search . \lambda z . \ldots)\; F\; \ulcorner i \urcorner \to^* \ulcorner \mathrm{if} \urcorner\; (\ulcorner {=}0 \urcorner\; (\ulcorner f \urcorner\; \ulcorner i \urcorner\; u_1 \ldots u_k))\; \ulcorner i \urcorner\; F\; (\ulcorner \mathrm{S} \urcorner\; \ulcorner i \urcorner))$$

$=_\beta \ulcorner i \urcorner$ si $\ulcorner f \urcorner\; \ulcorner i \urcorner\; u_1 \ldots u_k =_\beta \ulcorner 0 \urcorner$,
$F\; \ulcorner i{+}1 \urcorner$ sinon

La minimisation

$$
\begin{aligned}
\ulcorner \mu f \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda z_1 . \ldots . \lambda z_k .\ & \\
& \mathrm{Y}(\lambda \mathit{search} . \lambda z . \\
& \quad \ulcorner \mathrm{if} \urcorner\ (\ulcorner {=}0 \urcorner\ (\ulcorner f \urcorner\ z\ z_1 \ldots z_k)) \\
& \qquad z \\
& \qquad \mathit{search}\ (\ulcorner \mathrm{S} \urcorner\ z)) \\
& \ \ulcorner 0 \urcorner
\end{aligned}
$$

- **Prop.** Si $\ulcorner f \urcorner\ \ulcorner 0 \urcorner\ u_1 \ldots u_k =_\beta \ulcorner m_0 \urcorner, \ldots, \ulcorner f \urcorner\ \ulcorner n \urcorner\ u_1 \ldots u_k =_\beta \ulcorner m_n \urcorner$,
  avec $m_0, \ldots, m_{n-1}$ non nuls et $m_n{=}0$, alors
  $\ulcorner \mu f \urcorner\ u_1 \ldots u_k =_\beta \ulcorner n \urcorner$.

- Posons $F \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Y}(\lambda \mathit{search} . \lambda z .$
  $$
  \begin{aligned}
  & \ulcorner \mathrm{if} \urcorner\ (\ulcorner {=}0 \urcorner\ (\ulcorner f \urcorner\ z\ u_1 \ldots u_k)) \\
  & \qquad z \\
  & \qquad \mathit{search}\ (\ulcorner \mathrm{S} \urcorner\ z))
  \end{aligned}
  $$

$$
\begin{aligned}
F\ \ulcorner i \urcorner &=_\beta (\lambda \mathit{search} . \lambda z . \ldots)\ F\ \ulcorner i \urcorner \\
&\to^* \ulcorner \mathrm{if} \urcorner\ (\ulcorner {=}0 \urcorner\ (\ulcorner f \urcorner\ \ulcorner i \urcorner\ u_1 \ldots u_k)) \\
&\qquad\quad \ulcorner i \urcorner \\
&\qquad\quad F\ (\ulcorner \mathrm{S} \urcorner\ \ulcorner i \urcorner)) \\
&=_\beta \ulcorner i \urcorner \text{ si } \ulcorner f \urcorner\ \ulcorner i \urcorner\ u_1 \ldots u_k =_\beta \ulcorner 0 \urcorner, \\
&\quad\ \ F\ \ulcorner i{+}1 \urcorner \text{ sinon}
\end{aligned}
$$

- Donc
  $$
  \begin{aligned}
  \ulcorner \mu f \urcorner\ u_1 \ldots u_k &\to^* F\ \ulcorner 0 \urcorner \\
  &=_\beta F\ \ulcorner 1 \urcorner \\
  &=_\beta \ldots \\
  &=_\beta F\ \ulcorner n \urcorner =_\beta \ulcorner n \urcorner.
  \end{aligned}
  $$

Pouvoir expressif

- Au total, nous avons:
- **Théorème.** Pour toute fonction récursive $f : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N}$,
  il existe un λ-terme clos $\ulcorner f \urcorner$ tel que,
  pour tous $n_1, \ldots, n_k \in \mathbf{N}$,
  si $f(n_1, \ldots, n_k)$ est définie (et vaut, disons, n), alors
  $$\ulcorner f \urcorner \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner =_\beta \ulcorner n \urcorner$$

Pouvoir expressif

- Au total, nous avons:
- **Théorème.** Pour toute fonction récursive $f : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N}$,
  il existe un λ-terme clos $\ulcorner f \urcorner$ tel que,
  pour tous $n_1, \ldots, n_k \in \mathbf{N}$,
  si $f(n_1, \ldots, n_k)$ est définie (et vaut, disons, n), alors
  $\ulcorner f \urcorner \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner =_\beta \ulcorner n \urcorner$
- Kleene a montré encore plus fort:
  on peut demander que si $f(n_1, \ldots, n_k)$ n'est pas **définie**,
  alors $\ulcorner f \urcorner \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner$ n'est **pas normalisable**

Pouvoir expressif

- Au total, nous avons:
- **Théorème.** Pour toute fonction récursive $f : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N}$,
  il existe un λ-terme clos $\ulcorner f \urcorner$ tel que,
  pour tous $n_1, \ldots, n_k \in \mathbf{N}$,
  si $f(n_1, \ldots, n_k)$ est définie (et vaut, disons, n), alors
  $$\ulcorner f \urcorner \ \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner =_\beta \ulcorner n \urcorner$$
- Kleene a montré encore plus fort:
  on peut demander que si $f(n_1, \ldots, n_k)$ n'est pas **définie**,
  alors $\ulcorner f \urcorner \ \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner$ n'est **pas normalisable**
- C'est beaucoup plus dur, et utilise le **théorème de standardisation** (prochaine fois), ou bien de démontrer qu'en fait $\ulcorner f \urcorner \ \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_k \urcorner$ n'a même pas de **forme normale de tête** (prochaine fois)

… sans parler du fait que notre composition est en CBN, mais celle de Kleene est en CBV!

La prochaine fois

La prochaine fois

- Stratégies de réduction
- Rédexes de tête, formes normales de tête
- Réductions de tête, gauche, standard
- Théorème de standardisation