Jean Goubault-Larrecq

λ-calcul

4. Stratégies, standardisation

Cours « Logique et informatique » (L3), 2020-, 2ème semestre

Stratégies

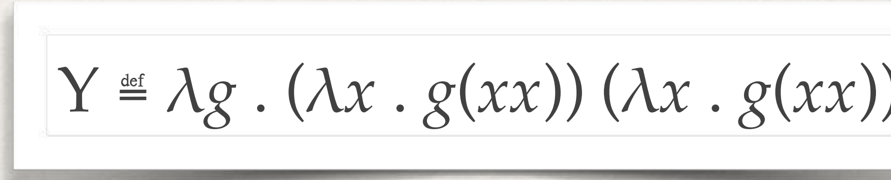
- En général, on doit **choisir** un rédex parmi tous ceux que l’on peut contracter, à chaque étape de réduction
- Une fonction qui à chaque terme non normal associe un de ses rédexes est une **stratégie**
- Quelques exemples de stratégies
- La stratégie gauche, et le théorème de standardisation

Classification des stratégies

- Stratégies **internes**: le rédex contracté est le plus bas possible (dans $(\lambda x\ .\ u)v$, u et v sont normaux)
- Stratégies **externes**: le rédex contracté est le plus haut possible (on ne réduit pas sous un rédex)
- Evaluation des arguments **de gauche à droite** (comme en Java, Python, etc.) ou **de droite à gauche** (comme en Caml)
- Stratégies **faibles**: on ne contracte pas sous une λ-abstraction (comme en Caml, Haskell, etc.)

La factorielle

- **fact** $\overset{\text{def}}{=} \mathrm{Y}\,(\lambda f\,.\,\lambda n\,.\,\ulcorner\mathrm{if}\urcorner\,(\ulcorner{=}0\urcorner\,n)\;\ulcorner 1\urcorner\;\;(\ulcorner\times\urcorner\,n\,(f\,(\ulcorner\mathrm{P}\urcorner\,n))))$
- Essayons d'abord une **stratégie interne**



$\mathrm{Y} \overset{\text{def}}{=} \lambda g\,.\,(\lambda x\,.\,g(xx))\,(\lambda x\,.\,g(xx)$

- $\mathrm{Y} \overset{\text{def}}{=} \lambda f\,.\,(\lambda x\,.\,f(xx))\,(\lambda x\,.\,f(xx))$

  … contient déjà un rédex interne

  $\rightarrow \lambda f\,.\,f((\lambda x\,.\,f(xx))\,(\lambda x\,.\,f(xx)))$

  $\rightarrow \lambda f\,.\,f(f((\lambda x\,.\,f(xx))\,(\lambda x\,.\,f(xx))))$

  $\rightarrow \lambda f\,.\,f(f(f((\lambda x\,.\,f(xx))\,(\lambda x\,.\,f(xx)))))$

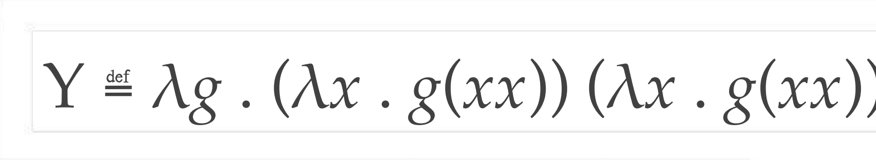
  $\rightarrow \ldots$

- peut-être pas une si bonne idée que ça

  (le calcul ne commence jamais vraiment!)

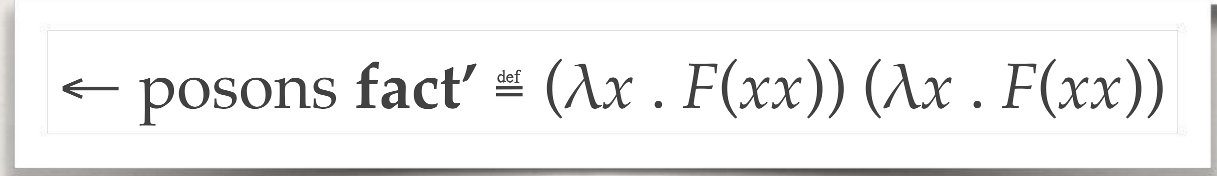
La factorielle, en stratégie externe

- $\mathbf{fact} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Y}\,\underbrace{(\lambda f\,.\,\lambda n\,.\,\ulcorner\mathrm{if}\urcorner\,(\ulcorner{=}0\urcorner\,n)\ \ulcorner 1\urcorner\ \ (\ulcorner\times\urcorner\,n\,(f\,(\ulcorner\mathrm{P}\urcorner\,n))))}_{F}$
- Essayons maintenant une **stratégie externe**



$\mathrm{Y} \overset{\text{def}}{=} \lambda g\,.\,(\lambda x\,.\,g(xx))\,(\lambda x\,.\,g(xx)$

- $\mathbf{fact} \rightarrow (\lambda x\,.\,F(xx))\,(\lambda x\,.\,F(xx))$



$\leftarrow$ posons $\mathbf{fact'} \overset{\text{def}}{=} (\lambda x\,.\,F(xx))\,(\lambda x\,.\,F(xx))$

- $\rightarrow F\ \mathbf{fact'}$
  $\rightarrow \lambda n\,.\,\ulcorner\mathrm{if}\urcorner\,(\ulcorner{=}0\urcorner\,n)\ \ulcorner 1\urcorner\ \ (\ulcorner\times\urcorner\,n\,(\mathbf{fact'}\,(\ulcorner\mathrm{P}\urcorner\,n)))$
- Avec une stratégie **faible**, la réduction s'arrêterait là
  Note: ce dernier terme n'est **pas** en forme normale

La factorielle, en stratégie externe

- $$\mathbf{fact} \overset{\text{def}}{=} YF$$
  $$F \overset{\text{def}}{=} \lambda f\,.\,\lambda n\,.\,\ulcorner\text{if}\urcorner\,(\ulcorner{=}0\urcorner\; n)\;\;\ulcorner 1\urcorner\;\;\;(\ulcorner\times\urcorner\; n\,(f\,(\ulcorner\mathrm{P}\urcorner\; n)))$$
  $$\mathbf{fact'} \overset{\text{def}}{=} (\lambda x\,.\,F(xx))\,(\lambda x\,.\,F(xx))$$
- $\mathbf{fact} \longrightarrow^{*} \lambda n\,.\,\ulcorner\text{if}\urcorner\,(\ulcorner{=}0\urcorner\; n)\;\;\ulcorner 1\urcorner\;\;\;(\ulcorner\times\urcorner\; n\,(\mathbf{fact'}\,(\ulcorner\mathrm{P}\urcorner\; n)))\;\;[\text{rappel}]$

  $\ulcorner\text{if}\urcorner \overset{\text{def}}{=} \lambda \mathit{test}\,.\,\lambda \mathit{then}\,.\,\lambda \mathit{else}\,.\,\mathit{test}\ \mathit{then}\ \mathit{else}$
- $\longrightarrow^{3} \lambda n\,.\,(\ulcorner{=}0\urcorner\; n)\;\;\ulcorner 1\urcorner\;\;\;(\ulcorner\times\urcorner\; n\,(\mathbf{fact'}\,(\ulcorner\mathrm{P}\urcorner\; n)))$

  $\ulcorner{=}0\urcorner \overset{\text{def}}{=} \lambda z\,.\,z\,(\lambda\,\_\,.\,\ulcorner\text{faux}\urcorner)\,\ulcorner\text{vrai}\urcorner$
- $\longrightarrow \lambda n\,.\,n\,(\lambda\,\_\,.\,\ulcorner\text{faux}\urcorner)\,\ulcorner\text{vrai}\urcorner\;\ulcorner 1\urcorner\;\;\;(\ulcorner\times\urcorner\; n\,(\mathbf{fact'}\,(\ulcorner\mathrm{P}\urcorner\; n)))$

  $\ulcorner\times\urcorner \overset{\text{def}}{=} \lambda z_1\,.\,\lambda z_2\,.\,\lambda f\,.\,z_1(z_2 f)$
- $\longrightarrow^{2} \lambda n\,.\,n\,(\lambda\,\_\,.\,\ulcorner\text{faux}\urcorner)\,\ulcorner\text{vrai}\urcorner\;\ulcorner 1\urcorner\;\;\;(\lambda f\,.\,n\,(\mathbf{fact'}\,(\ulcorner\mathrm{P}\urcorner\; n)\,f))$

et ça continue! (indéfiniment)
le prochain rédex est **fact′**, ici

La factorielle de 2, en stratégie externe

$$\mathbf{fact} \stackrel{\text{def}}{=} YF$$

$$F \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f \,.\, \lambda n \,.\, \ulcorner \mathrm{if} \urcorner \; (\ulcorner {=}0 \urcorner \; n) \;\; \ulcorner 1 \urcorner \;\; (\ulcorner \times \urcorner \; n \; (f \, (\ulcorner \mathrm{P} \urcorner \; n))$$

$$\mathbf{fact'} \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda x \,.\, F(xx)) \, (\lambda x \,.\, F(xx))$$

(⌜if⌝ …) n'est **plus** un rédex externe comme avant

- Calculons **fact** ⌜2⌝ par **stratégie externe**
- $\mathbf{fact} \; \ulcorner 2 \urcorner \to^{*} (\lambda n \,.\, \ulcorner \mathrm{if} \urcorner \; (\ulcorner {=}0 \urcorner \; n) \;\; \ulcorner 1 \urcorner \;\; (\ulcorner \times \urcorner \; n \; (\mathbf{fact'} \; (\ulcorner \mathrm{P} \urcorner \; n)))) \; \ulcorner 2 \urcorner$
- $\to \ulcorner \mathrm{if} \urcorner \; (\ulcorner {=}0 \urcorner \; \ulcorner 2 \urcorner) \;\; \ulcorner 1 \urcorner \;\; (\ulcorner \times \urcorner \; \ulcorner 2 \urcorner \; (\mathbf{fact'} \; (\ulcorner \mathrm{P} \urcorner \; \ulcorner 2 \urcorner)))$

$$\ulcorner \mathrm{if} \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda \mathit{test} \,.\, \lambda \mathit{then} \,.\, \lambda \mathit{else} \,.\, \mathit{test} \; \mathit{then} \; \mathit{else}$$

- $\to^{3} (\ulcorner {=}0 \urcorner \; \ulcorner 2 \urcorner) \;\; \ulcorner 1 \urcorner \;\; (\ulcorner \times \urcorner \; \ulcorner 2 \urcorner \; (\mathbf{fact'} \; (\ulcorner \mathrm{P} \urcorner \; \ulcorner 2 \urcorner)))$

$$\ulcorner {=}0 \urcorner \stackrel{\text{def}}{=} \lambda z \,.\, z \, (\lambda \_ \,.\, \ulcorner \mathrm{faux} \urcorner) \, \ulcorner \mathrm{vrai} \urcorner$$

- $\to^{4} \ulcorner \mathrm{faux} \urcorner \;\; \ulcorner 1 \urcorner \;\; (\ulcorner \times \urcorner \; \ulcorner 2 \urcorner \; (\mathbf{fact'} \; (\ulcorner \mathrm{P} \urcorner \; \ulcorner 2 \urcorner)))$

La factorielle de 2, en stratégie externe

- $$\mathbf{fact} \overset{\text{def}}{=} YF$$
  $$F \overset{\text{def}}{=} \lambda f\,.\,\lambda n\,.\,\ulcorner\mathrm{if}\urcorner\;(\ulcorner{=}0\urcorner\;n)\;\;\ulcorner 1\urcorner\;\;(\ulcorner\times\urcorner\;n\;(f\,(\ulcorner\mathrm{P}\urcorner\;n)))$$
  $$\mathbf{fact'} \overset{\text{def}}{=} (\lambda x\,.\,F(xx))\;(\lambda x\,.\,F(xx))$$
- Calculons **fact** $\ulcorner 2\urcorner$ par **stratégie externe** / sauf args de $\ulcorner\times\urcorner$
- $\mathbf{fact}\;\ulcorner 2\urcorner \rightarrow^* \ulcorner\times\urcorner\;\ulcorner 2\urcorner\;(\mathbf{fact'}\;(\ulcorner\mathrm{P}\urcorner\;\ulcorner 2\urcorner))$ [rappel]
- $\rightarrow^* \ulcorner\times\urcorner\;\ulcorner 2\urcorner\;(\ulcorner\times\urcorner\;(\ulcorner\mathrm{P}\urcorner\;\ulcorner 2\urcorner)\;(\mathbf{f}$
- $\rightarrow^* \ulcorner\times\urcorner\;\ulcorner 2\urcorner\;(\ulcorner\times\urcorner\;(\ulcorner\mathrm{P}\urcorner\;\ulcorner 2\urcorner)$

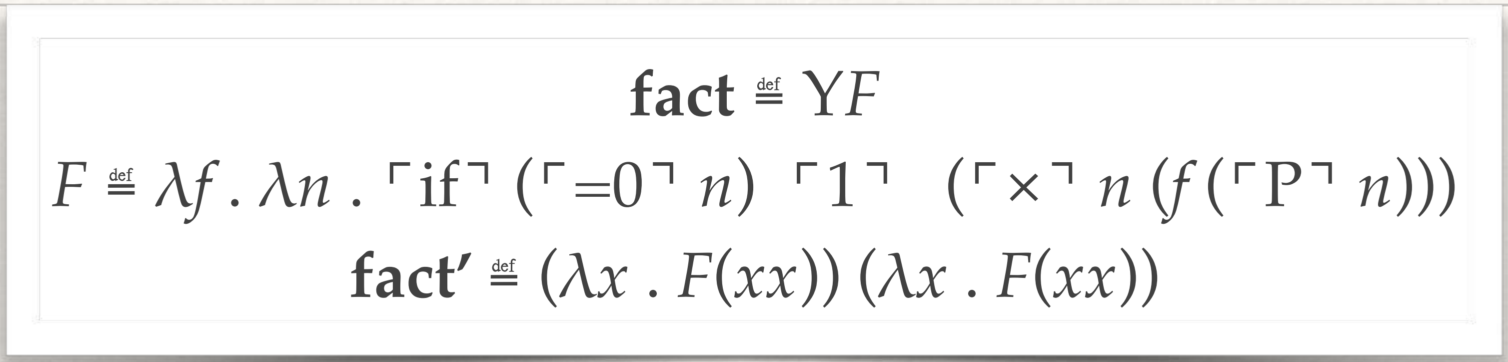
  $\urcorner\;(\ulcorner{=}0\urcorner\;(\ulcorner\mathrm{P}\urcorner\;(\ulcorner\mathrm{P}\urcorner\;\ulcorner 2\urcorner)))$

  $\ulcorner 1\urcorner\;\;(\ulcorner\times\urcorner\;(\ulcorner\mathrm{P}\urcorner\ulcorner 2\urcorner)\;(\mathbf{fact'}\;(\ulcorner\mathrm{P}\urcorner(\ulcorner\mathrm{P}\urcorner(\ulcorner\mathrm{P}\urcorner\ulcorner 2\urcorner))))))$
- $\rightarrow^* \ulcorner\;\;\urcorner\;\ulcorner 2\urcorner\;(\ulcorner\times\urcorner\;(\ulcorner\mathrm{P}\urcorner\;\ulcorner 2\urcorner)\;\ulcorner 1\urcorner)$
- $\rightarrow^* \ulcorner 2\urcorner$ [après de nombreuses étapes!]

ce test va s’évaluer en ⌜vrai⌝

le calcul terminerait aussi si on n’avait pas triché avec ⌜×⌝… mais serait moins lisible

La factorielle de 2, en stratégie externe

- 

$$\mathbf{fact} \overset{\text{def}}{=} YF$$

$$F \overset{\text{def}}{=} \lambda f\,.\,\lambda n\,.\,\ulcorner\mathrm{if}\urcorner\,(\ulcorner{=}0\urcorner\; n)\;\; \ulcorner 1\urcorner\;\; (\ulcorner\times\urcorner\; n\,(f\,(\ulcorner\mathrm{P}\urcorner\; n)))$$

$$\mathbf{fact'} \overset{\text{def}}{=} (\lambda x\,.\,F(xx))\,(\lambda x\,.\,F(xx))$$

- Calculons $\mathbf{fact}\ \ulcorner 2\urcorner$ par **stratégie externe** / sauf args de $\ulcorner\times\urcorner$
- $\mathbf{fact}\ \ulcorner 2\urcorner \rightarrow^{*} \ulcorner\times\urcorner\ \ulcorner 2\urcorner\ (\mathbf{fact'}\ (\ulcorner\mathrm{P}\urcorner\ \ulcorner 2\urcorner))$ [rappel]
- $\rightarrow^{*} \ulcorner\times\urcorner\ \ulcorner 2\urcorner\ (\ulcorner\times\urcorner\ (\ulcorner\mathrm{P}\urcorner\ \ulcorner 2\urcorner)\ (\mathbf{fact'}\ (\ulcorner\mathrm{P}\urcorner\ (\ulcorner\mathrm{P}\urcorner\ \ulcorner 2\urcorner))))$
- $\rightarrow^{*} \ulcorner\times\urcorner\ \ulcorner 2\urcorner\ (\ulcorner\times\urcorner\ (\ulcorner\mathrm{P}\urcorner\ \ulcorner 2\urcorner)$
  $(\ulcorner\mathrm{if}\urcorner\ (\ulcorner{=}0\urcorner\ (\ulcorner\mathrm{P}\urcorner\ (\ulcorner\mathrm{P}\urcorner\ \ulcorner 2\urcorner)))$
  $\ulcorner 1\urcorner\ \ (\ulcorner\times\urcorner\ (\ulcorner\mathrm{P}\urcorner\ulcorner 2\urcorner)\ (\mathbf{fact'}\ (\ulcorner\mathrm{P}\urcorner(\ulcorner\mathrm{P}\urcorner(\ulcorner\mathrm{P}\urcorner\ulcorner 2\urcorner))))))$
- $\rightarrow^{*} \ulcorner\times\urcorner\ \ulcorner 2\urcorner\ (\ulcorner\times\urcorner\ (\ulcorner\mathrm{P}\urcorner\ \ulcorner 2\urcorner)\ \ulcorner 1\urcorner)$
- $\rightarrow^{*} \ulcorner 2\urcorner$ [après de nombreuses étapes!]

ce test va s'évaluer en ⌜vrai⌝

le calcul terminerait aussi si
on n'avait pas triché avec ⌜×⌝…
mais serait moins lisible

Stratégies optimales?

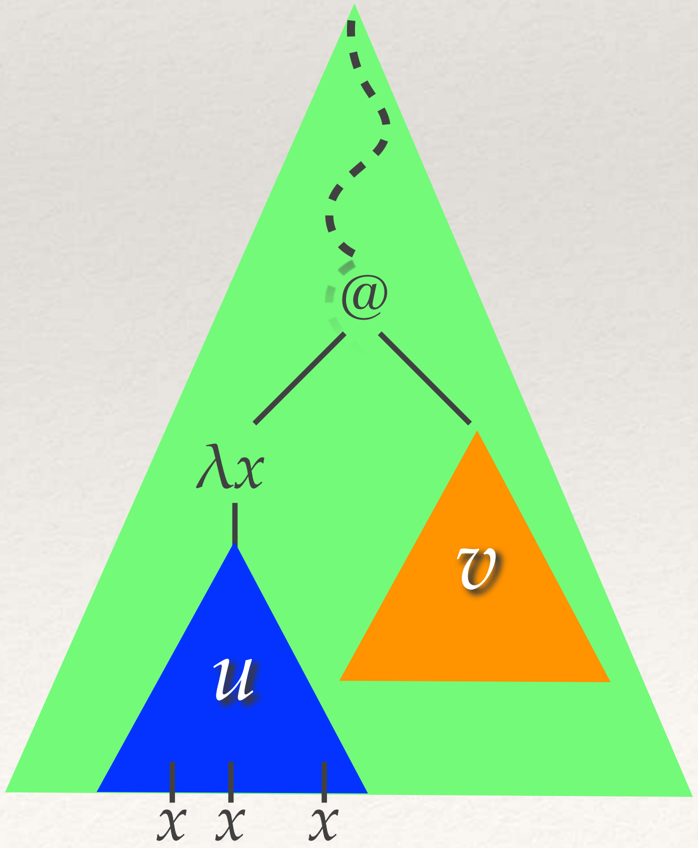
- Y a-t-il une stratégie (calculable) **optimale?**
- Si optimale = **standardisante**
  (= « trouve une forme normale s'il en existe une »)
  la réponse est **oui**: la **stratégie gauche**
  (voir transparents suivants) est standardisante
- Si optimale = minimise le nombre de β-réductions,
  la réponse est certainement dans le Barendregt
  (il me semble que c'est non)
- Si optimale = minimise le nombre de β-réductions
  partagées (dans un sens très fort, dû à Lévy),
  la réponse est **oui**: réductions optimales de Lamping

Stratégie gauche, réductions de tête

Stratégie gauche

- La stratégie **gauche** consiste à toujours sélectionner le rédex **le plus à gauche** dans l'écriture textuelle d'un terme

- De façon équivalente, dans la représentation en arbre:
  — parmi tous les rédexes **externes**
  — on choisit le **plus à gauche**
  (anglais: **leftmost-outermost**)



Forme de tête

- Etant donné un λ-terme u, on peut énumérer tous les $\lambda\, x_i$ au début de l'écriture de u:

  $$\lambda\, x_1 \,.\, \ldots \,.\, \lambda\, x_n \,.\, v$$

  de sorte que v ne soit **pas une λ-abstraction**

  (n peut valoir 0)

- on peut maintenant écrire v comme une application:

  $$h\; u_1 \ldots u_m$$

  où h n'est pas une application (m peut valoir 0)

- Donc…

Forme de tête

- On peut écrire tout λ-terme u de façon unique comme:

$$\lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . h\, u_1 \ldots u_m$$

« forme (normale de tête) »,
pas
« (forme normale) de tête »

avec $n, m \geq 0$, et:

  - soit h est une **variable** (la **variable de tête** de u
    on dit alors que u est en **forme normale de tête**)
  - soit h est une λ-abstraction $\lambda x . s$ et $m \geq 1$
    (alors $(\lambda x . s)\, u_1$ est le **rédex de tête** de u)

- Dans tous les cas, cette forme est la **forme de tête** de u
  — h est la **tête** de u
  — $u_1 \ldots u_m$ sont les **arguments** de u

Réduction de tête

- Une **réduction de tête** est une β-réduction qui contracte le rédex de tête (s'il existe)
- $\lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . (\lambda x . s)\, u_1 \ldots u_m$
  $\rightarrow_{\mathrm{t}} \lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . s[x{:=}u_1]\, u_2 \ldots u_m$
- On ne demande (surtout) **pas** que $\rightarrow_{\mathrm{t}}$ soit compatible au contexte
- **Note:** on a une compatibilité partielle, en ce que
  si $u \rightarrow_{\mathrm{t}} v$ alors $\lambda x . u \rightarrow_{\mathrm{t}} \lambda x . v$
- **Note:** la réduction de tête est **déterministe** (au plus 1 rédex de tête)
  En particulier, la forme normale de tête est **unique** si elle existe.

Formes normales de tête

- Tout terme u en forme normale a pour forme de tête une **forme normale de tête**:

$$\lambda x_1 . \dots . \lambda x_n . h\, u_1 \dots u_m \quad (h \text{ variable})$$

… car u ne contient pas de rédex

- Il existe des termes en forme normale de tête, qui ne sont **pas** normaux, par exemple:

$$\lambda x . x\, \Omega$$

- **Fait.** u est normal ssi il est en **forme normale de tête**:

$$\lambda x_1 . \dots . \lambda x_n . h\, u_1 \dots u_m \quad (h \text{ variable})$$

et, récursivement, **tous** ses arguments u_i sont **normaux**

On dit parfois
« u est **héréditairement** en forme
normale de tête »

Stratégies standard

- Une **stratégie standard** est, intuitivement,
  une stratégie qui réduit « du haut vers le bas »
- Toute stratégie externe (y compris la stratégie gauche) est standard
- Formellement, on donne une définition abstraite de la notion « se réduit par une stratégie standard
  [en 0, 1, ou plusieurs étapes] en »
  via une relation $\Rightarrow_S$, due à René David
  (ainsi que la preuve qui suit)

La relation de réduction standard $\Rightarrow_s$

- On dit que $u \Rightarrow_s v$ ssi (récurrence sur $|v|$)
  - v s'écrit sous forme de tête

    $$\lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . v_0\, v_1 \ldots v_m$$

  - $u \longrightarrow_t^* \lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . u_0\, u_1 \ldots u_m$ (les mêmes $x_1, \ldots, x_n$, merci le α-renommage)
  - $u_1 \Rightarrow_s v_1, \ldots, u_m \Rightarrow_s v_m$
  - $u_0 \Rrightarrow_s v_0$, ce par quoi j'entends:

    — si v_0 est une variable x, alors $u_0 = x$

    — si $v_0 = \lambda x . v'$, alors $u_0 = \lambda x . u'$ et $u' \Rightarrow_s v'$
- J'écrirai en abrégé:

$$\begin{tikzcd}
u \longrightarrow_t^* \lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . & u_0 \arrow[d, Rrightarrow, "s"'] & u_1 \arrow[d, Rightarrow, "s"'] & \ldots & u_m \arrow[d, Rightarrow, "s"'] & \\
\lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . & v_0 & v_1 & \ldots & v_m \arrow[r, phantom, "\overset{\text{tête}}{=}"] & v
\end{tikzcd}$$

La proposition clé (R. David)

- **Proposition.** Si $u \to^* v$ alors $u \Rightarrow_s v$.
- La démonstration se fait par une série assez longue de lemmes (la plupart évidents en apparence, mais nécessitent une preuve)
- C'est essentiellement un **tri**, qui réordonne les réductions de sorte à mettre les plus hautes d'abord
- Le lemme important est le **numéro 10** (!)
  qui dit que si $u \Rightarrow_s w \to v$, et si la réduction $w \to v$ est effectuée trop haut, on aurait pu la permuter avec des réductions antérieures de u à w opérant plus bas

La démonstration de la proposition clé

Réflexivité

- **1.** $\Rightarrow_s$ est **réflexive**: pour tout u, $u \Rightarrow_s u$.
- Par récurrence sur $|u|$

$$\begin{array}{lccccl} u \rightarrow_{t}^{*} \lambda x_1 . \dots . \lambda x_n . & u_0 & u_1 & \dots & u_m & \\ & \Downarrow_{s} & \Downarrow_{s} & & \Downarrow_{s} & \\ \lambda x_1 . \dots . \lambda x_n . & u_0 & u_1 & \dots & u_m & \overset{\text{tête}}{=} u \end{array}$$

en 0 étape

par hypothèse de récurrence (sur u')
si $u_0=\lambda x . u'$,
trivial sinon

par hypothèse
de récurrence

$u_0 \Rightarrow_s v_0$ ssi:

— si v_0 est une variable x, alors $u_0 = x$

— si $v_0=\lambda x . v'$, alors $u_0=\lambda x . u'$ et $u' \Rightarrow_s v'$

Toute réduction de tête est standard

- **2.** Si $u \rightarrow_{\mathrm{t}}^{*} v$ alors $u \Rightarrow_{\mathrm{s}} v$.
- Par définition de $\Rightarrow_{\mathrm{s}}$:

1. $u \Rightarrow_{\mathrm{s}} u$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
u \rightarrow_{\mathrm{t}}^{*} \lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . & v_0 \arrow[d, Rrightarrow, "\mathrm{s}"'] & v_1 \arrow[d, Rightarrow, "\mathrm{s}"'] & \ldots & v_m \arrow[d, Rightarrow, "\mathrm{s}"'] & = v \\
\lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . & v_0 & v_1 & \ldots & v_m & \overset{\text{tête}}{=} v
\end{tikzcd}$$

par 1. (sur v')
si $v_0 = \lambda x . v'$,
trivial sinon

par 1.

$u_0 \Rightarrow_{\mathrm{s}} v_0$ ssi:

— si v_0 est une variable x, alors $u_0 = x$

— si $v_0 = \lambda x . v'$, alors $u_0 = \lambda x . u'$ et $u' \Rightarrow_{\mathrm{s}} v'$

Réduction de tête + standard = standard

- **3.** Si $u \to_t^* v \Rightarrow_s w$ alors $u \Rightarrow_s w$.
- Par définition de $\Rightarrow_s$:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
u \longrightarrow_t^* \; v \longrightarrow_t^* \lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . & v_0 \arrow[d, Rightarrow, "s"'] & v_1 \arrow[d, Rightarrow, "s"'] & \ldots & v_m \arrow[d, Rightarrow, "s"'] & \\
\lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . & w_0 & w_1 & \ldots & w_m \arrow[r, equal, "\text{tête}"] & w
\end{tikzcd}$$

Réduction standard et λ-abstractions

- **4.** Si $\lambda x\ .\ u' \Rightarrow_{\mathrm{s}} v$ alors v est de la forme $\lambda x\ .\ v'$ et $u' \Rightarrow_{\mathrm{s}} v'$.
- On remarque d'abord que si $\lambda x\ .\ u' \rightarrow_{\mathrm{t}} s$

  alors s est de la forme $\lambda x\ .\ s'$ et $u' \rightarrow_{\mathrm{t}} s'$
- En effet, $[\lambda x\ .]\ u'$ est nécessairement de la forme

  $$[\lambda x\ .]\ \lambda\ x_2\ .\ \ldots\ .\ \lambda\ x_n\ .\ (\lambda\ y\ .\ t)\ u_1\ \ldots\ u_m\ (m \geq 1)$$

  et alors $s' = \lambda\ x_2\ .\ \ldots\ .\ \lambda\ x_n\ .\ t[y{:=}u_1]\ u_2\ \ldots\ u_m$
- En itérant, si $\lambda x\ .\ u' \rightarrow_{\mathrm{t}}^{*} s$

  alors s est de la forme $\lambda x\ .\ s'$ et $u' \rightarrow_{\mathrm{t}}^{*} s'$

Réduction standard et λ-abstractions

- **4.** Si $\lambda x \,.\, u' \Rightarrow_s v$ alors v est de la forme $\lambda x \,.\, v'$ et $u' \Rightarrow_s v'$.
- Donc (rappel), si $\lambda x \,.\, u' \to_t^* s$
  alors s est de la forme $\lambda x \,.\, s'$ et $u' \to_t^* s'$
- Maintenant, si $\lambda x \,.\, u' \Rightarrow_s v$, alors:

$$\begin{tikzcd}
\lambda x \,.\, u' \to_t^* \lambda x_1 \,.\, \ldots \,.\, \lambda x_n \,. & s_0 \arrow[d, Rightarrow, "s"'] & s_1 \arrow[d, Rightarrow, "s"'] & \ldots & s_m \arrow[d, Rightarrow, "s"'] & = s \\
\lambda x_1 \,.\, \ldots \,.\, \lambda x_n \,. & v_0 & v_1 & \ldots & v_m & \overset{\text{tête}}{=} v
\end{tikzcd}$$

- donc $n \geq 1$, $x = x_1$ (à α-renommage près), et

$$\begin{tikzcd}
u' \to_t^* \lambda x_2 \,.\, \ldots \,.\, \lambda x_n \,. & s_0 \arrow[d, Rightarrow, "s"'] & s_1 \arrow[d, Rightarrow, "s"'] & \ldots & s_m \arrow[d, Rightarrow, "s"'] & = s' \\
\lambda x_2 \,.\, \ldots \,.\, \lambda x_n \,. & v_0 & v_1 & \ldots & v_m & \overset{\text{tête}}{\overset{\text{def}}{=}} v'
\end{tikzcd}$$

Réduction de tête faible

- Une forme **de tête faible** est une forme de tête

  $$\lambda\, x_1 \,.\, \ldots \,.\, \lambda\, x_n \,.\, h\; u_1 \,\ldots\, u_m$$

  avec n=0: autrement dit, **pas** de λ en tête:

  $$h\; u_1 \,\ldots\, u_m$$

  où: h variable ou bien m≥1

- **Réduction de tête faible**:
  on réduit le rédex de tête uniquement s'il est faible
  (pas sous un λ)

  $$(\lambda\, x \,.\, s)\; u_1 \,\ldots\, u_m \to_{\mathrm{tf}}\; s[x{:=}u_1]\; u_2 \ldots\, u_m \quad (m{\geq}1)$$

- Pas de compatibilité aux contextes, sauf…

Réduction de tête faible

- $(\lambda x . s)\, u_1 \ldots u_m \to_{\mathrm{tf}} s[x{:=}u_1]\, u_2 \ldots u_m$
- **Note:** si $u \to_{\mathrm{tf}} v$, alors $uw \to_{\mathrm{tf}} vw$
- Ce n'est **pas vrai** pour la réduction de tête $\to_{\mathrm{t}}$:
  par exemple
  $$\lambda z . (\lambda x . s)\, u_1 \to_{\mathrm{t}} \lambda z . s[x{:=}u_1]$$
  mais
  $$(\lambda z . (\lambda x . s)\, u_1)\, w \to_{\mathrm{t}} ((\lambda x . s)\, u_1)\, [z{:=}w],$$
  pas $(\lambda z . s[x{:=}u_1])\, w$

Réduction de tête faible

- **5.** Si $u \rightarrow_{\mathrm{t}}{}^{*} t{=}hu_1 \ldots u_m$ forme de tête faible, alors $u \rightarrow_{\mathrm{tf}}{}^{*} t$
- En effet, dans une réduction de tête

  $$\lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . (\lambda x . s)\, t_1 \ldots t_m$$

  $$\rightarrow_{\mathrm{t}} \lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . s[x{:=}t_1]\, t_2 \ldots t_m$$

  il y a au moins autant de λ en tête du terme de droite qu'en tête du terme de gauche

  (à savoir n; il peut y en avoir davantage:
  si $s[x{:=}t_1]$ est une λ-abstraction et $m{=}1$)
- Comme il y en 0 en tête de t, il y en avait 0 en tête de tous les termes de la réduction de tête $u \rightarrow_{\mathrm{t}}{}^{*} t$

Applications et réductions standard

- **6.** Si $u \Rightarrow_s v$ et $u' \Rightarrow_s v'$ alors $uu' \Rightarrow_s vv'$.
- Démonstration (1/3). Comme $u \Rightarrow_s v$, on a:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
u \rightarrow_t^* \lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . & u_0 \arrow[d, Rightarrow, "s"'] & u_1 \arrow[d, Rightarrow, "s"'] & \ldots & u_m \arrow[d, Rightarrow, "s"'] \\
\lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . & v_0 & v_1 & \ldots & v_m \overset{\text{tête}}{=} v
\end{tikzcd}$$

- Si n=0,

5. Si $u \rightarrow_t^* t$ forme de tête faible, alors $u \rightarrow_{tf}^* t$

$$u \rightarrow_{tf}^* u_0\, u_1 \ldots u_m$$

- Donc

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
uu' \rightarrow_{tf}^* & u_0 \arrow[d, Rightarrow, "s"'] & u_1 \arrow[d, Rightarrow, "s"'] & \ldots & u_m \arrow[d, Rightarrow, "s"'] & u' \arrow[d, Rightarrow, "s"'] \\
& v_0 & v_1 & \ldots & v_m & v' \overset{\text{tête}}{=} vv'
\end{tikzcd}$$

Note: si $u \rightarrow_{tf} v$, alors $uw \rightarrow_{tf} vw$

Applications et réductions standard

- **6.** Si $u \Rightarrow_{\mathrm{s}} v$ et $u' \Rightarrow_{\mathrm{s}} v'$ alors $uu' \Rightarrow_{\mathrm{s}} vv'$.
- Démonstration (2/3). Si $n{\neq}0$ dans:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
u \rightarrow_{\mathrm{t}}^{*} \lambda\, x_1 \,.\, \ldots \,.\, \lambda\, x_n \,. & u_0 \arrow[d, Rightarrow, "\mathrm{s}"'] & u_1 \arrow[d, Rightarrow, "\mathrm{s}"'] & \ldots & u_m \arrow[d, Rightarrow, "\mathrm{s}"'] \\
\lambda\, x_1 \,.\, \ldots \,.\, \lambda\, x_n \,. & v_0 & v_1 & \ldots & v_m \overset{\text{tête}}{=} v
\end{tikzcd}$$

on peut écrire

$$u \rightarrow_{\mathrm{tf}}^{*} t \rightarrow_{\mathrm{t}}^{*} \lambda\, x_1 \,.\, \ldots \,.\, \lambda\, x_n \,.\, u_0\, u_1 \ldots u_m$$

de sorte que $u \rightarrow_{\mathrm{tf}}^{*} t$ soit le plus grand préfixe formé de réductions de tête **faibles** à partir de u

- t s'écrit lui-même $\lambda\, x_1 \,.\, t'$ (à α-renommage près):
— soit au moins un $\rightarrow_{\mathrm{t}}$ non faible après t,
— soit $t = \lambda\, x_1 \,.\, \ldots \,.\, \lambda\, x_n \,.\, u_0\, u_1 \ldots u_m$ (rappel: $n{\neq}0$)

Applications et réductions standard

- **6.** Si $u \Rightarrow_{\mathrm{s}} v$ et $u' \Rightarrow_{\mathrm{s}} v'$ alors $uu' \Rightarrow_{\mathrm{s}} vv'$.
- Démonstration (3/3). $n{\neq}0$ dans:

$$\begin{tikzcd}
u \to_{\mathrm{tf}}^{*} t = \lambda\, x_1 \,.\, t' \to_{\mathrm{t}}^{*} \lambda\, x_1 \,.\, \ldots \,.\, \lambda\, x_n \,. & u_0 \arrow[d, Rrightarrow, "\mathrm{s}"'] & u_1 \arrow[d, Rightarrow, "\mathrm{s}"'] & \ldots & u_m \arrow[d, Rightarrow, "\mathrm{s}"'] \\
\lambda\, x_1 \,.\, \ldots \,.\, \lambda\, x_n \,. & v_0 & v_1 & \ldots & v_m \overset{\text{tête}}{=} v
\end{tikzcd}$$

et en particulier

$$\begin{tikzcd}
t' \to_{\mathrm{t}}^{*} \lambda\, x_2 \,.\, \ldots \,.\, \lambda\, x_n \,. & u_0 \arrow[d, Rrightarrow, "\mathrm{s}"'] & u_1 \arrow[d, Rightarrow, "\mathrm{s}"'] & \ldots & u_m \arrow[d, Rightarrow, "\mathrm{s}"'] \\
\lambda\, x_2 \,.\, \ldots \,.\, \lambda\, x_n \,. & v_0 & v_1 & \ldots & v_m
\end{tikzcd}$$

(en forme de tête)

- Donc $t' \Rightarrow_{\mathrm{s}} \lambda\, x_2 \,.\, \ldots \,.\, \lambda\, x_n \,.\, v_0\, v_1 \ldots v_m$
- Aussi, $uu' \to_{\mathrm{tf}}^{*} \underline{(\lambda\, x_1 \,.\, t')}u'$

$$\begin{tikzcd}
\underline{(\lambda\, x_1 \,.\, t')} \arrow[d, Rrightarrow, "\mathrm{s}"'] & u' \arrow[d, Rightarrow, "\mathrm{s}"'] \\
v & v'
\end{tikzcd}$$

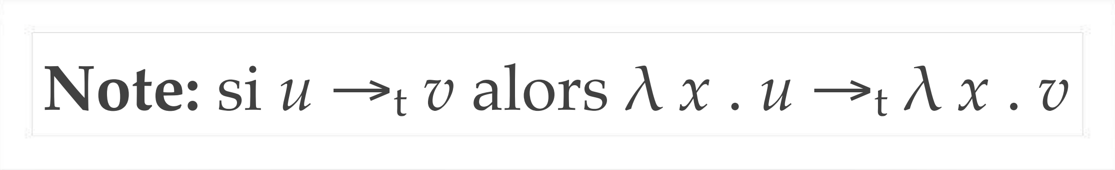
(en forme de tête, car $n{\neq}0$)

Note: si $u \to_{\mathrm{tf}} v$, alors $uw \to_{\mathrm{tf}} vw$

Abstractions et réductions standard

- **7.** Si $u \Rightarrow_{\mathrm{s}} v$ alors $\lambda x . u \Rightarrow_{\mathrm{s}} \lambda x . v$
- Comme $u \Rightarrow_{\mathrm{s}} v$:

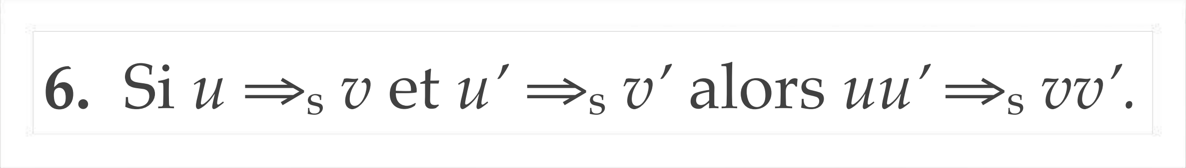
$$\begin{array}{rcccccc}
u \longrightarrow_{\mathrm{t}}^{*} \lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . & u_0 & u_1 & \ldots & u_m & & \\
& \Downarrow_{\mathrm{s}} & \Downarrow_{\mathrm{s}} & & \Downarrow_{\mathrm{s}} & & \\
\lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . & v_0 & v_1 & \ldots & v_m & \overset{\text{tête}}{=} & v
\end{array}$$



Note: si $u \rightarrow_{\mathrm{t}} v$ alors $\lambda x . u \rightarrow_{\mathrm{t}} \lambda x . v$

- Donc:

$$\begin{array}{rcccccc}
\lambda x . u \longrightarrow_{\mathrm{t}}^{*} \lambda x . \lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . & u_0 & u_1 & \ldots & u_m & & \\
& \Downarrow_{\mathrm{s}} & \Downarrow_{\mathrm{s}} & & \Downarrow_{\mathrm{s}} & & \\
\ldots . \lambda x_n . & v_0 & v_1 & \ldots & v_m & \overset{\text{tête}}{=} & \lambda x . v
\end{array}$$

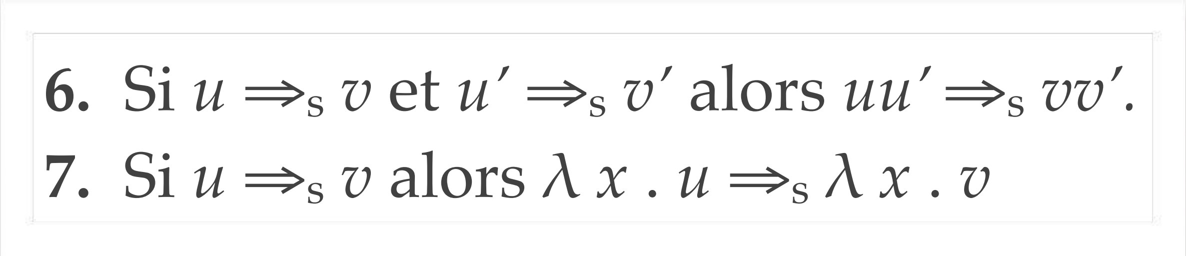


6. Si $u \Rightarrow_{\mathrm{s}} v$ et $u' \Rightarrow_{\mathrm{s}} v'$ alors $uu' \Rightarrow_{\mathrm{s}} vv'$.

- Par 6 et 7, $\Rightarrow_{\mathrm{s}}$ est donc **compatible aux contextes**

Une petite subtilité

- **8.** Si $u_0 \Rightarrow_{\mathrm{s}} w_0$, $u_1 \Rightarrow_{\mathrm{s}} w_1$, …, $u_m \Rightarrow_{\mathrm{s}} w_m$, alors $\lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . u_0\, u_1 \ldots u_m \Rightarrow_{\mathrm{s}} \lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . w_0\, w_1 \ldots w_m$
- Ça peut sembler être la définition même, mais non: dans la définition, il faut $u_0 \Rightarrow_{\mathrm{s}} v_0$
- 8 est une conséquence triviale de:



6. Si $u \Rightarrow_{\mathrm{s}} v$ et $u' \Rightarrow_{\mathrm{s}} v'$ alors $uu' \Rightarrow_{\mathrm{s}} vv'$.
7. Si $u \Rightarrow_{\mathrm{s}} v$ alors $\lambda x . u \Rightarrow_{\mathrm{s}} \lambda x . v$

Substitutions (1/3)

- **9.** Si $u' \Rightarrow_s w'$ et $u_1 \Rightarrow_s w_1$ alors $u'[x{:=}u_1] \Rightarrow_s w'[x{:=}w_1]$
- Par récurrence sur (la taille de) w'
  Par définition:

$$
\begin{array}{rcccccc}
u' \to_t^* \lambda y_1 . \dots . \lambda y_n . & u'_0 & u'_1 & \dots & u'_m & & \\
 & \Downarrow_s & \Downarrow_s & & \Downarrow_s & & \\
\lambda y_1 . \dots . \lambda y_n . & w'_0 & w'_1 & \dots & w'_m & \overset{\text{tête}}{=} & w'
\end{array}
$$

- Par hypothèse de récurrence, $u'_i[x{:=}u_1] \Rightarrow_s w'_i[x{:=}w_1]$
  pour chaque i avec $1 \leq i \leq m$… mais pour $i{=}0$?
  - si $u'_0 = w'_0$ variable:
    — $\dots = x$: $u'_0[x{:=}u_1] = u_1 \Rightarrow_s w_1 = w'_0[x{:=}w_1]$ par hypothèse
    — $\dots \neq x$: $u'_0[x{:=}u_1] = u'_0 = w'_0 = w'_0[x{:=}w_1]$

1. $u \Rightarrow_s u$.

  - sinon, $u'_0 = \lambda z.s$, $w'_0 = \lambda z.t$, $s \Rightarrow_s t$
    donc $u'_0[x{:=}u_1] = \lambda z.(s[x{:=}u_1]) \Rightarrow_s \lambda z.(t[x{:=}w_1]) = w'_0[x{:=}w_1]$
    par hypothèse de récurrence +

7. Si $u \Rightarrow_s v$ alors $\lambda z . u \Rightarrow_s \lambda z . v$

Substitutions (2/3)

- **9.** Si $u' \Rightarrow_s w'$ et $u_1 \Rightarrow_s w_1$ alors $u'[x{:=}u_1] \Rightarrow_s w'[x{:=}w_1]$
- Par récurrence sur (la taille de) w'
  Par définition:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
u' \rightarrow_t^* \lambda y_1 . \ldots . \lambda y_n . & u'_0 \arrow[d, Rightarrow, "s"'] & u'_1 \arrow[d, Rightarrow, "s"'] & \ldots & u'_m \arrow[d, Rightarrow, "s"'] & \\
\lambda y_1 . \ldots . \lambda y_n . & w'_0 & w'_1 & \ldots & w'_m & \overset{\text{tête}}{=} w'
\end{tikzcd}$$

- Par hypothèse de récurrence, $u'_i[x{:=}u_1] \Rightarrow_s w'_i[x{:=}w_1]$ pour chaque i avec $1 \leq i \leq m$… et pour $i=0$ aussi!
- Donc:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
u'[x{:=}u_1] \rightarrow_t^* \lambda y_1 . \ldots . \lambda y_n . & u'_0[x{:=}u_1] \arrow[d, Rightarrow, "s"'] & u'_1[x{:=}u_1] \arrow[d, Rightarrow, "s"'] & \ldots & u'_m[x{:=}u_1] \arrow[d, Rightarrow, "s"'] \\
\lambda y_1 . \ldots . \lambda y_n . & w'_0[x{:=}w_1] & w'_1[x{:=}w_1] & \ldots & w'_m[x{:=}w_1] \\
\overset{\text{tête}}{=} w'[x{:=}w_1] & & & &
\end{tikzcd}$$

Substitutions (3/3)

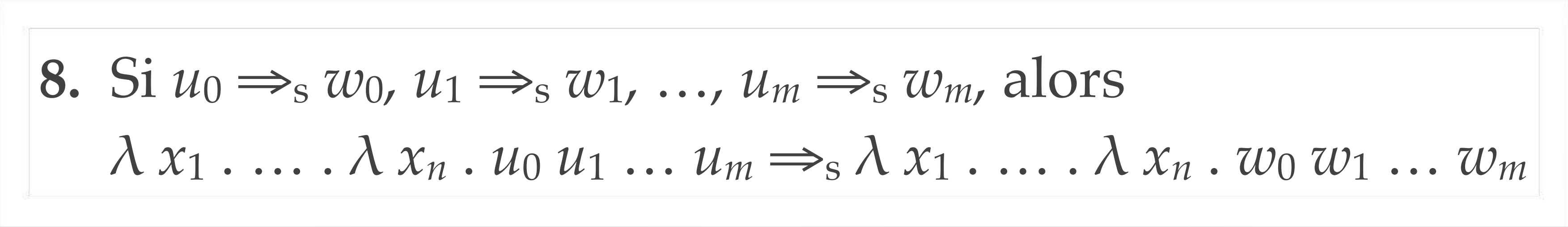
- **9.** Si $u' \Rightarrow_s w'$ et $u_1 \Rightarrow_s w_1$ alors $u'[x{:=}u_1] \Rightarrow_s w'[x{:=}w_1]$
- Rappel:

$$u'[x{:=}u_1] \to_t^* \overbrace{\lambda y_1 . \ldots . \lambda y_n . u'_0[x{:=}u_1]\ \ u'_1[x{:=}u_1]\ \ \ldots\ u'_m[x{:=}u_1]}^{v'}$$

$$\Downarrow_s \qquad\qquad \Downarrow_s \qquad\qquad \Downarrow_s$$

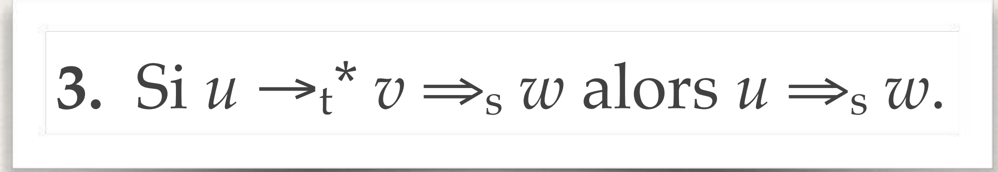
$$\lambda y_1 . \ldots . \lambda y_n . w'_0[x{:=}w_1]\ w'_1[x{:=}w_1]\ \ldots\ w'_m[x{:=}w_1]$$

$$\overset{\text{tête}}{=} w'[x{:=}w_1]$$



8. Si $u_0 \Rightarrow_s w_0$, $u_1 \Rightarrow_s w_1$, …, $u_m \Rightarrow_s w_m$, alors
$\lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . u_0\, u_1 \ldots u_m \Rightarrow_s \lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . w_0\, w_1 \ldots w_m$

- Donc $u'[x{:=}u_1] \to_t^* v' \Rightarrow_s w'[x{:=}w_1]$
- Donc $u'[x{:=}u_1] \Rightarrow_s w'[x{:=}w_1]$



3. Si $u \to_t^* v \Rightarrow_s w$ alors $u \Rightarrow_s w$.

Le lemme de tri

- **10.** Si $u \Rightarrow_s w \rightarrow v$ alors $u \Rightarrow_s v$.
- Par récurrence sur (la taille de) w

  Comme $u \Rightarrow_s w$:

$$\begin{tikzcd}
u \rightarrow_t^* \lambda x_1 . \dots . \lambda x_n . & u_0 \arrow[d, Rrightarrow, "s"'] & u_1 \arrow[d, Rightarrow, "s"'] & \dots & u_m \arrow[d, Rightarrow, "s"'] & \\
\lambda x_1 . \dots . \lambda x_n . & w_0 & w_1 & \dots & w_m & \overset{\text{tête}}{=} w
\end{tikzcd}$$

- Examinons la position du rédex contracté dans w

  Cas 1.1: rédex dans w_i, pour un i tel que $1 \leq i \leq m$

$$w_i \rightarrow v_i \text{ et } v = \lambda x_1 . \dots . \lambda x_n . w_0 \, w_1 \dots \enclose{circle}{v_i} \dots w_m$$

  - On a $u_i \Rightarrow_s w_i \rightarrow v_i$, donc par hyp. réc. $u_i \Rightarrow_s v_i$
  - Donc

$$\begin{tikzcd}
u \rightarrow_t^* \lambda x_1 . \dots . \lambda x_n . & u_0 \arrow[d, Rrightarrow, "s"'] & u_1 \arrow[d, Rightarrow, "s"'] & \dots & u_i \arrow[d, Rightarrow, "s"'] & \dots & u_m \arrow[d, Rightarrow, "s"'] & \\
\lambda x_1 . \dots . \lambda x_n . & w_0 & w_1 & \dots & v_i & \dots & w_m & \overset{\text{tête}}{=} v
\end{tikzcd}$$

Le lemme de tri

- **10.** Si $u \Rightarrow_{\mathrm{s}} w \rightarrow v$ alors $u \Rightarrow_{\mathrm{s}} v$.
- Par récurrence sur (la taille de) w

$$\begin{tikzcd}
u \rightarrow_{\mathrm{t}}^{*} \lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . & u_0 \arrow[d, Rightarrow, "\mathrm{s}"'] & u_1 \arrow[d, Rightarrow, "\mathrm{s}"'] & \ldots & u_m \arrow[d, Rightarrow, "\mathrm{s}"'] & \\
\lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . & w_0 & w_1 & \ldots & w_m & \overset{\text{tête}}{=} w
\end{tikzcd}$$

- **Cas 1.2:** rédex dans w_0: donc $w_0 = \lambda x.w'$, $w' \rightarrow v'$

  et $v = \lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . (\lambda x.v')\, w_1 \ldots w_m$

  - par déf. de $\Rightarrow_{\mathrm{s}}$, u_0 est de la forme $\lambda x.u'$ et $u' \Rightarrow_{\mathrm{s}} w'$
  - On a $u' \Rightarrow_{\mathrm{s}} w' \rightarrow v'$, donc par hyp. réc. $u' \Rightarrow_{\mathrm{s}} v'$
  - Donc

$$\begin{tikzcd}
u \rightarrow_{\mathrm{t}}^{*} \lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . & (\lambda x.u') \arrow[d, Rightarrow, "\mathrm{s}"'] & u_1 \arrow[d, Rightarrow, "\mathrm{s}"'] & \ldots & u_m \arrow[d, Rightarrow, "\mathrm{s}"'] & \\
\lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . & (\lambda x.v') & w_1 & \ldots & w_m & \overset{\text{tête}}{=} v
\end{tikzcd}$$

Le lemme de tri

- **10.** Si $u \Rightarrow_{\mathrm{s}} w \to v$ alors $u \Rightarrow_{\mathrm{s}} v$.
- Par récurrence sur (la taille de) w

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
u \to_{\mathrm{t}}^{*} \lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . & u_0 \arrow[d, Rightarrow, "\mathrm{s}"'] & u_1 \arrow[d, Rightarrow, "\mathrm{s}"'] & \ldots & u_m \arrow[d, Rightarrow, "\mathrm{s}"'] \\
\lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . & w_0 & w_1 & \ldots & w_m \overset{\text{tête}}{=} w
\end{tikzcd}$$

- **Cas 2:** (le cas important) $w_0 = \lambda x.w'$, $m \geq 1$ et $v = \lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . w'[x:=w_1]\, w_2 \ldots w_m$

Le lemme de tri

Donc la réduction de w à v est **de tête**:
$w = \lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . (\lambda x . w') \; w_1 \ldots w_m$
$\to_t^* \lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . w'[x := w_1] \; w_2 \; \ldots w_m$
… et donc trop haute en général

$$_1 . \ldots . \lambda x_n . u_0 \quad u_1 \quad \ldots \quad u_m$$

$$\Downarrow_s \quad \Downarrow_s \qquad \Downarrow_s$$

$$_1 . \ldots . \lambda x_n . w_0 \; w_1 \ldots w_m \overset{\text{tête}}{=} w$$

- **Cas 2:** (le cas important) $w_0 = \lambda x . w'$, $m \geq 1$
  et $v = \lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . w'[x := w_1] \; w_2 \ldots w_m$
  - par déf. de $\Rightarrow_s$, u_0 est de la forme $\lambda x . u'$ et $u' \Rightarrow_s w'$

Le lemme de tri

Donc la réduction de w à v est **de tête**:
$w{=}\lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . (\lambda x.w') \, w_1 \ldots w_m$
$\rightarrow_t^* \lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . w'[x{:=}w_1] \, w_2 \ \ldots w_m$

On aurait donc pu effectuer
cette réduction de tête **plus tôt**:
$\lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . (\lambda x.u') \, u_1 \ldots u_m$
$\rightarrow_t^* \lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . u'[x{:=}u_1] \, u_2 \ \ldots u_m$

$$
\begin{array}{l}
{}_1 . \ldots . \lambda \, x_n . \, u_0 \quad u_1 \quad \ldots \, u_m \\
\qquad\qquad\quad \Downarrow_s \quad \Downarrow_s \qquad\quad \Downarrow_s \\
{}_1 . \ldots . \lambda \, x_n . \, w_0 \; w_1 \; \ldots \; w_m \overset{\text{tête}}{=} w
\end{array}
$$

$x.w', \, m{\geq}1$

$. \, w'[x{:=}w_1] \; w_2 \ldots w_m$

- par déf. de $\Rightarrow_s$, u_0 est de la forme $\lambda x.u'$ et $u' \Rightarrow_s w'$


9. Si $u' \Rightarrow_s w'$ et $u_1 \Rightarrow_s w_1$ alors $u'[x{:=}u_1] \Rightarrow_s w'[x{:=}w_1]$

- Donc

$$
\begin{array}{l}
u \rightarrow_t^* \lambda \, x_1 . \ldots . \lambda \, x_n . (\lambda x.u') \;\; u_1 \ldots u_m \\
\quad \rightarrow_t \; \lambda \, x_1 . \ldots . \lambda \, x_n . \, u'[x{:=}u_1] \;\; u_2 \;\; \ldots \, u_m \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \Downarrow_s \qquad\quad \Downarrow_s \qquad\quad \Downarrow_s \\
\lambda \, x_1 . \ldots . \lambda \, x_n . \, w'[x{:=}w_1] \; w_2 \ldots w_m \overset{\text{tête}}{=} v
\end{array}
$$

- Donc $u \Rightarrow_s v$ par 8+3.

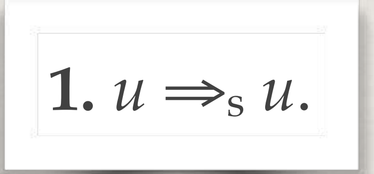
La proposition clé (R. David)

- On peut maintenant montrer:

  Proposition. Si $u \rightarrow^* v$ alors $u \Rightarrow_{\mathrm{s}} v$.

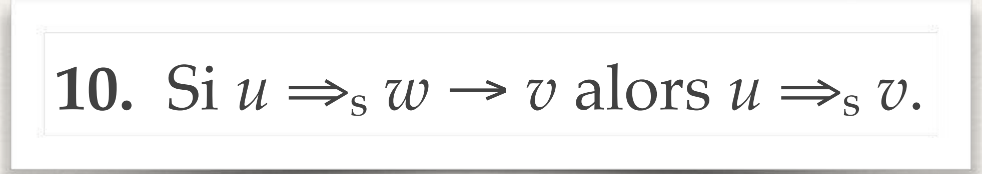
Je vous laisse démontrer que la réciproque est vraie aussi:
donc $u \rightarrow^* v$ **si et seulement si** $u \Rightarrow_{\mathrm{s}} v$.

- Par récurrence sur la longueur k de la réduction $u \rightarrow^* v$
- Si k=0,



1. $u \Rightarrow_{\mathrm{s}} u$.

- Sinon, il existe un w tel que $u \rightarrow^* w$ en $\leq k$–1 étapes
  et $w \rightarrow v$
- Par hyp. réc., $u \Rightarrow_{\mathrm{s}} w$
- Donc $u \Rightarrow_{\mathrm{s}} v$.



10. Si $u \Rightarrow_{\mathrm{s}} w \rightarrow v$ alors $u \Rightarrow_{\mathrm{s}} v$.

Standardisation

Réduction standard vers une forme normale

- Un point subtil:
  si $u \Rightarrow_s v$,

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
u \rightarrow_t^* \lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . & u_0 \arrow[d, Rightarrow, "s"'] & u_1 \arrow[d, Rightarrow, "s"'] & \ldots & u_m \arrow[d, Rightarrow, "s"'] \\
\lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . & v_0 & v_1 & \ldots & v_m = v
\end{tikzcd}$$

  alors $\lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . u_0\ u_1 \ldots u_m$ n'est **pas nécessairement** la forme normale de tête de u

  ($u_0\ u_1$ peut être un rédex)

- Mais ceci n'arrive pas si v est en **forme normale**
  (car alors v_0 est une variable, et donc u_0=v_0 par déf. de $\Rightarrow_s$)

Réductions standard, réductions gauches

- **Proposition.** Si $u \Rightarrow_{\mathrm{s}} v$ **et** si v est normal,
  alors $u \to^* v$ par une réduction gauche
- Par récurrence sur $|v|$

toute réduction de tête est gauche

- Comme v normal:

$$\begin{array}{llllll} u \to_{\mathrm{t}}^{*} & \lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . & x & u_1 & \ldots & u_m \\ & & \| & \Downarrow_{\mathrm{s}} & & \Downarrow_{\mathrm{s}} \\ & \lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . & x & v_1 & \ldots & v_m = v \end{array}$$

- Donc $u \to_{\mathrm{gauche}}^{*} \lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . x\, u_1\, u_2 \ldots u_m$

gauche dans u_1, donc dans tout le terme car pas de rédex plus à gauche

$\downarrow^{*}$ gauche par hyp. réc.

- $\to_{\mathrm{gauche}}^{*} \lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . x\, v_1\, u_2 \ldots u_m$

gauche dans u_2, donc dans tout le terme car pas de rédex plus à gauche

$\downarrow^{*}$ gauche par hyp. réc.

- $\to_{\mathrm{gauche}}^{*} \lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . x\, v_1\, v_2 \ldots u_m$
- … $\to_{\mathrm{gauche}}^{*} \lambda x_1 . \ldots . \lambda x_n . x\, v_1\, v_2 \ldots v_m$

Théorème de standardisation

- **Théorème.** Pour tous λ-termes u, v, les affirmations:
  1. $u \to^* v$ 2. $u \to^* v$ par réduction gauche 3. $u \Rightarrow_s v$
  sont telles que $2 \Rightarrow 1 \Longleftrightarrow 3$.
  Si de plus v est **normal**, $1 \Longleftrightarrow 2 \Longleftrightarrow 3$.
- On a donc un **algorithme** pour trouver la forme normale d'un terme u, si elle existe:
  — tant que u n'est pas normal, réduire son rédex gauche
- (Bien entendu, si u n'est pas normalisable, cet algorithme ne termine pas.)

La prochaine fois

La prochaine fois

- Modèles du λ-calcul
- Arbres de Böhm
- Le modèle $\mathbf{P}\omega$ de Gordon Plotkin et Dana Scott
- (Peut-être) le modèle D_∞ de Dana Scott